COMO É POSSÍVEL O CONHECIMENTO MATEMÁTICO?

AS ESTRUTURAS LÓGICO-MATEMÁTICAS A PARTIR DA EPISTEMOLOGIA GENÉTICA

ALEXANDRE AUGUSTO FERRAZ
RICARDO PEREIRA TASSINARI

Como é possível o conhecimento matemático?

ALEXANDRE AUGUSTO FERRAZ
RICARDO PEREIRA TASSINARI

COMO É POSSÍVEL O CONHECIMENTO MATEMÁTICO?

AS ESTRUTURAS LÓGICO-MATEMÁTICAS A PARTIR DA EPISTEMOLOGIA GENÉTICA

CULTURA
ACADÊMICA
Editora

Cultura Acadêmica
Praça da Sé, 108
01001-900 – São Paulo – SP
Tel.: (0xx11) 3242-7171
Fax: (0xx11) 3242-7172
www.culturaacademica.com.br
www.livrariaunesp.com.br
feu@editora.unesp.br

CIP – Brasil. Catalogação na publicação
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

F431c

Ferraz, Alexandre Augusto
Como é possível o conhecimento matemático? [recurso eletrônico]: as estruturas lógico-matemática a partir da Epistemologia Genética / Alexandre Augusto Ferraz, Ricardo Pereira Tassinari. – 1.ed. – São Paulo: Cultura Acadêmica, 2015.
Recurso digital

Formato: ePub
Requisitos do sistema: Adobe Digital Editions
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-85-7983-656-5 (recurso eletrônico)

1. Matemática. 2. Modelos matemáticos. 3. Estruturas lógico-matemáticas. 4. Epistemologia. 5. Livros eletrônicos. I. Tassinari, Ricardo Pereira. II. Título.

15-26803 CDD: 510.7
CDU: 51(07)

Este livro é publicado pelo Programa de Publicações Digitais da Pró-Reitoria de Pós-Graduação da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp)

Editora afiliada:

Sumário

Para Alessandra:
que a vida lhe reserve generosidade.

Agradecimentos

Agradecemos a todos aqueles que contribuíram para a realização deste livro. Em especial, aos professores Adrian Oscar Dongo Montoya, Clélia Maria Ignatius Nogueira, Luiz Henrique da Cruz Silvestrini e Fábio Maia Bertato.

Agradecemos à Capes e à Fapesp pelo auxílio com bolsas de mestrado durante a realização do trabalho que originou este livro: sem elas, teria sido impossível a sua realização.

O primeiro autor agradece também à família: a João, Lindinalva, Alessandra, Angela, Ana e Flávio, pelo apoio e paciência; aos amigos de Bauru: Mariana, Aline, Nádia, Tatiane, Estefânia, Juliete, Raísa, Thaís, Valmira, Claudia, Carla (e Terezinha), Vania, Samantha, Maria Helena, Gilza, Márcia, Elisete, Daniella; aos amigos de Marília: Nathália, Débora, João, Iracelis, Danilo, Samuel, Mariana, Paulo, Diogo, Ana, Kátia, Laura, Juliana, Maria Amélia, Elcio, Rafael Ferreira, Tiago, Gianluca, Rafael Teruel, Angela, Vanessa e Georgia; aos amigos de Sorocaba: Bárbara, Pamila, Regiane, Rodrigo, Edder e, em particular, ao José Vargas, pela parceria caótica.

Introdução

Jean Piaget é o fundador da Epistemologia Genética e um dos maiores contribuintes da Psicologia Genética. Suas pesquisas nessas áreas têm por objetivo analisar a gênese dos conhecimentos e das estruturas a eles necessárias, desde suas origens orgânicas até os níveis mais complexos, em especial, o do conhecimento científico. Na Psicologia Genética, Piaget realiza um estudo experimental e teórico que visa verificar questões de fato sobre a gênese do conhecimento e de suas estruturas. A Epistemologia Genética se encontra em um plano filosófico e se constitui tanto em análises dos conhecimentos gerados pela Psicologia Genética quanto em análises histórico-críticas da gênese do conhecimento científico e de suas estruturas.

Em linhas gerais, podemos dizer ainda que, a partir da delimitação metodológica da Psicologia Genética, pela observação e explicitação dos fatos relacionados ao desenvolvimento dos sujeitos, a Epistemologia Genética surge em um contexto que busca descobrir a gênese dos mais distintos tipos de conhecimentos para então analisar sua evolução, desde os níveis elementares até o conhecimento e o raciocínio em contextos científicos. Nesse sentido, por

um lado, Piaget busca compreender como se dá a evolução dos conhecimentos individuais, no campo psicogenético, e, por outro, faz uma análise histórico-crítica da ciência, de sua gênese e de seu desenvolvimento. Podemos então dizer, *grosso modo*, que a Epistemologia Genética e as pesquisas de Piaget em Psicologia Genética objetivam determinar quais são as estruturas epistêmico-psicológicas (ou estrutura mental)[1] necessárias ao conhecimento científico.

Nesse contexto, dois tipos de conhecimentos científicos considerados por Piaget são a Lógica e a Matemática.

Para Piaget (1983, p.39-49), não existem conhecimentos que são resultado de meros registros de observações, uma vez que sempre é necessária uma estrutura que se origina das atividades do indivíduo.[2] O autor considera que o conhecimento não se constitui como mera cópia do real, mas se constitui ao "agir sobre ele e transformá-lo [...] em função dos sistemas de transformação aos quais estão ligadas estas ações" (p.15). Tais estruturas cognitivas não são inatas. Para o autor (1983, p.39-49), somente o funcionamento da inteligência é hereditário, e não as próprias estruturas.

Assim, as estruturas epistêmico-psicológicas são resultado de organizações de ações exercidas sobre objetos, reorganizadas segundo as características específicas de tais objetos e de acordo com as possibilidades de organi-

1 Conforme veremos no Capítulo 2 deste livro, segundo Ramozzi-Chiarotinno (1984) "a estrutura mental é a estrutura orgânica responsável pela capacidade humana de estabelecer relações, condição de todo conhecimento possível" (p.34). Entretanto, neste livro, não estudaremos a correlação entre as estruturas epistêmico-psicológicas e suas raízes orgânicas.

2 Notemos que, para as atividades que o sujeito realiza quando interage com o objeto, são necessárias estruturas anatômicas e morfológicas já constituídas e que, no caso da estrutura mental, em especial, se originam das atividades do sujeito e nelas.

zação (coordenação). As estruturas cognitivas são, assim, construídas mediante a interação entre o sujeito e o objeto de conhecimento.

Essa concepção estrutural, bem como a noção de que o conhecimento e suas estruturas necessárias são construídos pelo sujeito, por meio de sua ação sobre o objeto, ambas presentes na teoria piagetiana, fornecem os elementos para uma possível formalização e solução de questões relacionadas à análise do conhecimento científico por meio de uma exploração lógico-matemática, levando em consideração a forma dos modelos abstratos que constituem esse conhecimento (Piaget, 1979, p.37), sendo as estruturas dos modelos abstratos estudadas nas áreas da Lógica e da Matemática.

Dentro desse contexto geral, neste livro buscaremos compreender e explicitar, através da Epistemologia Genética, como o sujeito epistêmico constrói as estruturas lógico-matemáticas, partindo das relações entre as estruturas epistêmico-psicológicas, encontradas na Psicologia Genética, e as estruturas abstratas, estudadas na Lógica e na Matemática. Procuraremos responder à questão de uma forma eminentemente piagetiana: explicitando a gênese no desenvolvimento de uma estrutura necessária ao conhecimento a partir das relações entre sujeito e objeto.

O problema principal a ser investigado situa-se em um contexto epistemológico, em especial, na Epistemologia da Matemática e da Lógica. Devido ao caráter extremamente abstrato e cada vez mais formal das estruturas lógico-matemáticas, esse conhecimento é bastante distinto dos demais, o que sugere o questionamento acerca da possibilidade e do tipo de existência de tal conhecimento formal e, por conseguinte, a busca pelo entendimento da natureza das estruturas de caráter estritamente abstrato, uma vez que os objetos lógico-matemáticos, evidentemente, não são passíveis de observação empírica.

Ora, para Piaget, a Epistemologia, sob sua forma geral, deve considerar o conhecimento tanto do ponto de vista do objeto quanto do sujeito. Em particular, quando ela trata a Matemática, seja sob a forma axiomatizada, seja sob a forma de relações lógicas puramente formais, acaba tratando apenas o conhecimento do ponto de vista do objeto, apesar de ser constantemente reconduzida aos problemas das relações estabelecidas entre o sujeito e o objeto de conhecimento. Nesse sentido, o problema específico, em Epistemologia da Matemática, que será abordado neste livro, é compreender como a Lógica e a Matemática são possíveis (e, como diria Piaget, não somente naquilo que concerne às atividades do sujeito que produz tal conhecimento, mas também da adequação desse conhecimento produzido ao real propriamente dito).

Quanto à Epistemologia da Lógica, em primeiro lugar, o presente livro busca explicitar, com base no pensamento de Piaget, a lógica enquanto axiomatização das estruturas operatórias do sujeito, mas não se limitando a elas. Como veremos, as estruturas lógicas são formalizações das estruturas operatórias do pensamento do sujeito, ou, em outras palavras, as estruturas lógico-matemáticas são estruturas operatórias formais específicas.

Para Piaget, o conhecimento é um processo contínuo de construções que se origina das atividades do sujeito e nelas. As estruturas lógicas, enquanto conhecimentos científicos, resultam desse processo contínuo de construção. Nesse contexto, buscaremos aqui identificar algumas das estruturas operatórias do pensamento do sujeito para mostrar as relações dessas estruturas com as estruturas lógicas (e matemáticas), iniciando com uma estrutura psicológica construída por ele no primeiro período de seu desenvolvimento, que Piaget denomina de sensório-motor, cuja estruturação se dá por meio de ações propriamente ditas sobre objetos físicos.

Nesse sentido, quando nos perguntamos como o sujeito epistêmico compreende as estruturas lógico-matemáticas abstratas, no contexto da Epistemologia Genética, estamos justamente buscando as relações que podem ser estabelecidas entre as estruturas epistêmico-psicológicas e as mais diversas estruturas da Lógica e da Matemática. Nossa hipótese então é a de que o sujeito epistêmico (sujeito do conhecimento) compreende as estruturas abstratas por meio de um sistema de operações sobre signos (e, no caso das geometrias, por meio de um sistema de signos e símbolos). A pergunta que nos fazemos, diante do exposto, é: como explicitar o funcionamento de uma estrutura epistêmico-psicológica, cujo surgimento, no sujeito do conhecimento, se dá no período operatório formal, por um processo ininterrupto de abstrações reflexivas e experiências lógico-matemáticas iniciado nas ações sensório-motoras?

Segundo Piaget (1978), ainda que a Lógica axiomatizada possa cortar todos os seus vínculos com o sujeito, tornando-se puramente formal, algumas perguntas ainda são necessárias: "quais as relações entre os procedimentos da formalização e os do pensamento 'natural'? Que é que a lógica vem a formalizar? Por que depara a lógica com limites, como demonstrado por Gödel?" (p.40).

Se buscarmos nas estruturas operatórias do sujeito os elementos que a Lógica formaliza, devemos levar em conta o processo histórico de construção que interessa a todos os níveis do desenvolvimento, desde os mais elementares até as formas das estruturas operatórias superiores (Piaget, 1980, p.320).

Ao percorrer essa gênese de construção do conhecimento, devem-se deixar de lado as experiências internas, consideradas estaticamente, e levar em conta os meios pelos quais o sujeito passa de um conhecimento elementar rumo às formas superiores, por meio de abstração

reflexionante. Esta, segundo Piaget (1995), consiste em uma forma de abstração que "[...] procede de ações ou operações do sujeito" (p.4-5) e, a partir dessas ações ou operações, ela "[transfere] a um plano superior o que foi tirado de um nível inferior de atividade, do que advêm diferenças que levam necessariamente ao patamar de chegada a composições novas e generalizações". Trata-se de uma abstração das próprias coordenações de suas ações (diferentemente de uma "abstração empírica" das propriedades físicas dos próprios objetos físicos).

Nesse contexto, à Psicologia estão reservadas, segundo o pensamento piagetiano, as condições de fato que se referem à formação dessas estruturas elementares e à passagem do plano de coordenação de ações ao da abstração reflexionante. Piaget (1980) considera, enfim, que "as pressuposições operatórias de tal axiomatização lógica são extraídas por abstração reflexionante das estruturas operatórias subjacentes do pensamento natural" (p.332). A Lógica poderá, então, formalizá-las enquanto sistema de operações abstratas.

Cabe ainda evidenciar que tal abordagem epistemológica não se identifica com as formas de psicologismo, que reduzem as verdades lógicas e matemáticas à Psicologia. Segundo Piaget, diferentemente, trata-se da formalização de estruturas operatórias subjacentes ao pensamento, e não dos dados introspectivos da consciência. De acordo com o teórico (1980), "a consciência atinge apenas o resultado dos processos mentais sem incidir sobre os seus mecanismos íntimos e só descobre uma parte destes por meio de abstração reflexionante" (p.331). Portanto, os sujeitos não têm consciência das estruturas subjacentes aos seus processos mentais, e não se poderia reduzir a Lógica e a Matemática àquilo que se encontra em tais consciências, pois voltaríamos às concepções psicologistas, que empobrecem as formas abstratas que caracterizam as axiomatizações das teorias dessas áreas.

Devemos, com isso, buscar, nas estruturas epistêmico-psicológicas elementares, do ponto de vista genético, a constituição inicial das estruturas lógico-matemáticas abstratas. De fato, como afirma Piaget (2001), no caso da transitividade de relações seriais ou mesmo de encaixes topológicos no plano representativo, é possível encontrar sua equivalência funcional já no período sensório-motor, quando o sujeito tem uma inteligência prática. Por exemplo, "[...] quando um bebê levanta uma cobertura, sob a qual se tinha colocado um relógio, e percebe um chapéu (que se tinha escondido lá, sem que ele soubesse e sob o qual se colocou o relógio), imediatamente levanta o boné, esperando aí encontrar o relógio" (p.82). Nesse caso, continua: "compreende então, através da ação, uma espécie de transitividade das relações que se poderiam exprimir em palavras: 'o relógio estava sob o chapéu, o chapéu sob a cobertura, donde o relógio está sob a cobertura'".

É mais instrutivo, porém, de acordo com Piaget (1980), iniciar nossas análises nas "primeiras estruturas propriamente operatórias que se constituem [...] sob uma forma relativamente equilibrada e que servem de trampolim a todas as outras construções ulteriores" (p.347). Trata-se, como veremos, do período operatório concreto, sendo que os três tipos de estruturas que se apresentam na análise genética, nesse período, são sempre estruturas que recaem ora sobre objetos, ora sobre relações, ora sobre noções de vizinhança, de limite e de continuidade.[3]

---

3 Respectivamente, as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas, consideradas estruturas-mães pelo grupo de matemáticos Nicolas Boubarki, com frequência citado por Piaget. Esses três tipos de estruturas são irredutíveis umas às outras. No entanto, fornecem entre si diversas combinações, gerando outras estruturas mais complexas e generalizadas do ponto de vista genético, bem como do ponto de vista matemático.

Primeiramente, segundo ele, as operações elementares provêm das ações: a operação reunião consiste numa interiorização do ato propriamente dito de reunir objetos. Portanto, tal ato – o de reunir, por exemplo – incide sobre o próprio objeto físico e se desenrola num contexto geral que ele denomina de experiência. Tal fato exprime uma das principais razões utilizadas por Piaget para justificar que a linguagem não é a única responsável pelo surgimento das operações lógico-matemáticas elementares. Para o autor, existem origens mais profundas do que a linguagem no que diz respeito à constituição das estruturas do período operatório concreto.

O estudo das operações de classes e de relações mostra que as operações que possibilitam reunir ou dissociar as classificações ou seriações têm suas origens nas ações de organizar e desorganizar objetos, isto é, nas coordenações de ações, e, portanto, têm suas raízes do período sensório-motor. Logo, não é somente a linguagem que forma esse tipo de operação: podemos observar na inteligência sensório-motora o seu equivalente funcional.

No entanto, evidentemente, a linguagem fornece uma generalidade para tais estruturas de classes e de relações. A questão é considerar única e exclusivamente a linguagem como sendo a origem desse pensamento operatório. Tal exemplo – e muitos outros poderiam ser dados – esclarece a origem das operações constitutivas de encaixamentos representativos, por exemplo: têm suas raízes nas próprias coordenações motoras.[4]

---

4 Nesse sentido, apesar de Piaget considerar que é mais instrutivo buscar nas estruturas operatórias elementares a constituição inicial das estruturas lógico-matemáticas, no Capítulo 2 relacionaremos uma estrutura sensório-motora, o grupo prático de deslocamentos, com uma estrutura matemática, o grupo, mostrando como essa é a forma matemática daquele. Isso nos parece necessário porque, primeiro, podemos mostrar que a origem das estruturas lógico-

Portanto, para este livro, a linguagem não é suficiente para explicar o surgimento das estruturas lógico-matemáticas, uma vez que as raízes de tais estruturas estão no período sensório-motor (construindo-se através do período operatório concreto até chegar ao período operatório formal ou hipotético dedutivo), assim definido por Piaget e colaboradores (1976; 2003; 2008), a inteligência consistindo em coordenar ações sobre as bases de uma inteligência prática ou perceptiva (portanto sensorial) e motora.

Por meio desta breve discussão sobre algumas das concepções epistemológicas presentes na teoria de Jean Piaget, elaboramos nossa principal hipótese: o sistema de operações sobre signos é a estrutura epistêmico-psicológica que possibilita ao sujeito epistêmico a compreensão das mais variadas estruturas da Lógica e das Matemáticas abstratas.

De forma resumida, podemos dizer que a correspondência entre as estruturas epistêmico-psicológicas e as estruturas matemáticas permite explicar como estas últimas são possíveis, na medida em que as primeiras assumem a forma delas, e como o sujeito entende as estruturas matemáticas, na medida em que elas são formas de um sistema de ações e operações, o que permite que ele venha a tomar consciência dessas formas. Nesse sentido, as estruturas abstratas são construídas através de abstrações reflexi-

-matemáticas está de fato nas ações sensório-motoras e, segundo, uma de nossas principais hipóteses é a de que o sujeito compreende essas estruturas por meio da sua representação através de um sistema de operações parciais sobre signos. De forma geral, podemos correr o risco de pensar que o sistema de operações sobre signos é meramente um sistema linguístico, mas, como veremos, a gênese desse sistema está nas ações sensório-motoras, que tornam a sua análise muito mais profunda do ponto de vista psicogenético.

vas e experiências lógico-matemáticas sobre operações do pensamento natural.

Para compreendermos o funcionamento do sistema de operações sobre signos, a estrutura epistêmico-psicológica que permite ao ser humano compreender as estruturas matemáticas específicas e abstratas, pressupomos que o correspondente funcional dessa estrutura pode ser encontrado nas ações sensório-motoras, que são, por sua vez, a base para qualquer tipo de conhecimento e, em especial, o científico, segundo a Epistemologia Genética. Além disso, como veremos, optamos por uma análise estrutural do ponto de vista genético, e não por uma análise funcional, ou funcional e estrutural. Como nosso interesse é compreender a possibilidade do conhecimento das estruturas lógico-matemáticas, optamos por limitar nossa análise somente ao ponto de vista estrutural.

Para realizar a análise da constituição das estruturas lógico-matemáticas pelo sujeito, através das relações possíveis entre tais estruturas e as estruturas epistêmico-psicológicas, no Capítulo 1 apresentaremos alguns conceitos lógico-matemáticos e, a partir de tais conceitos, buscaremos explicitar o que entendemos por formas matemáticas, através das noções de estruturas (matemáticas) e de isomorfismos entre elas.

No Capítulo 2, apresentaremos alguns aspectos da teoria de Piaget que dizem respeito ao período sensório-motor e mostraremos que, já na estruturação sensório-motora, existem formas matemáticas no sentido definido anteriormente. Nesse capítulo, mostraremos que a gênese das estruturas abstratas está nas ações sensório-motoras e que, de acordo com a teoria epistemológica de Piaget, encontramos os fundamentos para a compreensão das estruturas matemáticas nas ações e, por conseguinte, podemos dizer que em suas ações práticas o sujeito já possui uma estruturação que tem uma forma

lógico-matemática. Assim, os atos representativos que ele é capaz de realizar nos próximos estágios de seu desenvolvimento são ações internas cada vez mais complexas e coordenadas em sistemas.

No Capítulo 3, inspirados nos trabalhos de Tassinari, explicitaremos uma estrutura matemática – a estrutura de digrafos-RPT – associada a uma estrutura epistêmico-psicológica – o sistema de esquemas de transfigurações. Além disso, analisaremos como esse sistema constitui uma estrutura epistêmico-psicológica necessária para compreender como se dá a passagem na qual a criança age sobre a experiência sensível até o surgimento das estruturas lógico-operatórias.

Por fim, no Capítulo 4, elaboraremos nossas principais hipóteses para responder como o sujeito compreende as estruturas lógico-matemáticas abstratas a partir de um sistema de esquemas de transignações.

1
As estruturas matemáticas

É impossível consagrar-se a uma exposição crítica do estruturalismo sem começar pelo exame das estruturas matemáticas, e isso devido a razões não apenas lógicas, mas também pertencentes à própria história das ideias.
[...] *parece incontestável que a mais antiga estrutura, conhecida e estudada como tal, foi a de "grupo", descoberta por Galois, e que lentamente conquistou as Matemáticas do século XIX.*
[...] *Fundamento da álgebra, a estrutura de grupo revelou-se de uma generalidade e de uma fecundidade extraordinárias. Encontramo-la em quase todos os domínios das Matemáticas e na Lógica; adquiriu uma importância fundamental na Física e é provável que o mesmo acontecerá um dia em relação à Biologia. É importante, pois, procurar compreender as razões desse sucesso porque, podendo ser considerado como um protótipo das "estruturas", e em domínios onde tudo o que se afirma deve ser demonstrado, o grupo fornece as mais sólidas razões para confiar em um porvir do estruturalismo quando reveste formas precisas.*

(Piaget, 1979, p.12)

Neste capítulo, apresentaremos nossa concepção de um tipo particular de forma matemática, a partir das noções de estruturas e de isomorfismos entre estruturas. Para tal, seguiremos os seguintes passos: explicitaremos a definição de estrutura matemática específica, a partir do trabalho de Shoenfield (1967); apresentaremos a definição de operação parcial unitária e mostraremos como uma estrutura matemática específica A pode ser considerada como constituída de conjuntos de conjuntos de operações parciais unitárias no conjunto de indivíduos de A; exemplificaremos uma das mais importantes estruturas estudadas em Matemática, a estrutura de grupo, e abordaremos a noção de "estrutura matemática abstrata", mediante a noção de sistema abstrato de Kleene (1952), para mostrar que o grupo é uma estrutura matemática abstrata; finalmente, explicitaremos o que entendemos por forma matemática para, nos capítulos posteriores, discutir a questão da existência de formas matemáticas nas estruturas epistêmico-psicológicas do sujeito epistêmico.

Estruturas matemáticas específicas

Para introduzir a definição de estrutura matemática específica, vamos nos basear livro *Mathematical Logic* (Shoenfield, 1967), por se tratar de obra de referência na área. Comecemos, então, com algumas definições necessárias para a definição de estrutura matemática específica.[1]

1 Shoenfield (1967, p.9) introduz inicialmente os conceitos de conjuntos e mapeamento para depois derivar todos os outros a partir desses. Essa introdução inicial visa apenas estabelecer a terminologia e a notação, pois tais conceitos são em momento posterior tratados axiomaticamente pelo autor. Neste livro, necessitamos apenas

Definição 1.1. Dado um conjunto A, uma n-upla em A é uma sequência de n elementos (não necessariamente distintos) de A.

Notação 1.1. Denotamos por $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a n-upla cujos elementos são, respectivamente, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e por A^n o conjunto de todas as n-uplas em A.

Por exemplo, a n-upla (0, 3, 5, 5, 394) é uma 5-upla (ou quíntupla) no conjunto dos números naturais.

Temos então as seguintes definições, segundo Shoenfield (1967, p.10):

Definição 1.2. Dado um conjunto A, um predicado n-ário em A é um subconjunto do conjunto de n-uplas em A.

Por exemplo, no conjunto dos números naturais, o predicado (relação ou propriedade) unário "x é par" é o conjunto $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$; o predicado 2-ário (binário) "x é menor que y" é o conjunto $\{(x,y) \mid x < y\}$, ou seja, $\{(0,1), (0,2), (1,2), \ldots\}$; e o predicado binário "x é maior que y" é o conjunto $\{(x,y) \mid x > y\}$, ou seja, $\{(1,0), (2,0), (2,1), \ldots\}$.

Notação 1.2. Se P denota um predicado n-ário, então $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ denota que a n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ está em P. Em especial, quando P é um predicado binário, escrevemos $a_1 P a_2$ para denotar que (a_1, a_2) está em P.

Por exemplo, escrevemos Par (2) para denotar que o número é par, e $0 < 1$ para denotar que 0 é menor que 1.

---

estabelecer a terminologia e a notação relativas às estruturas matemáticas para, a partir daí, expor alguns resultados gerais sobre elas, motivo pelo qual também assumiremos, em nossa exposição, as noções de conjunto e mapeamento como noções primitivas, sem discutir a questão da fundamentação da Matemática a partir de teorias axiomáticas de conjunto (como se costuma fazer nos estudos contemporâneos em Lógica Matemática), pois ultrapassa o objetivo deste livro.

Definição 1.3. Dados dois conjuntos A e B não vazios, um mapeamento F de A em B é uma atribuição de um objeto b em B para cada objeto a em A. Nesse caso, b é denominado valor de a segundo o mapeamento F, A de domínio de F e B de contradomínio de F.

Notação 1.3. Escrevemos $F(a)$ para denotar o valor de a segundo o mapeamento F.

Definição 1.4. Uma função n-ária de A em B é um mapeamento de A^n em B.[2]

Por exemplo, a função sucessor s do conjunto dos números naturais para o conjunto dos números naturais, tal que $s(0) = 1$, $s(1) = 2$, $s(2) = 3$ etc. é uma função unária; a função adição + do conjunto de pares de números naturais para o conjunto dos números naturais, tal que ao par (x,y) é atribuído o valor $x+y$, é uma função binária.

Podemos agora introduzir a definição de estrutura matemática específica.[3]

Definição 1.5. Uma estrutura matemática específica A é constituída por:[4]

2 Ao considerar uma função n-ária como um mapeamento, pressupomos que, na Definição 1.3, cada objeto a de A está relacionado com um único objeto b em B. Nesse caso, cada n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de A^n está relacionada com um único elemento b de B e, portanto, a noção de função de A em B e a de mapeamento coincidem. Buscamos definir função a partir da noção de mapeamento, pois acreditamos que esta é mais intuitiva ao leitor. Além disso, seguimos aqui o livro do Shoenfield (1967), no qual a definição de função se faz através da definição de mapeamento.

3 Em geral, nos textos matemáticos, usa-se o termo "estrutura matemática" sem o adjetivo "específica", como aqui. Entretanto, usamos esse adjetivo para distinguir as estruturas matemáticas abstratas que consideraremos mais adiante e que não satisfazem a definição introduzida neste momento. Assim, ambas, estruturas matemáticas específicas e estruturas matemáticas abstratas, serão consideradas tipos especiais de estruturas matemáticas.

4 Essa noção é introduzida por Shoenfield (1967, p.18). No entanto, a definição de estrutura, em sua obra, como usualmente se faz em

(**i**) Um conjunto não vazio $|A|$ de elementos. $|A|$ é denominado o universo ou domínio da estrutura e os seus elementos são denominados indivíduos da estrutura.
(**ii**) Um conjunto P_A de predicados n-ários em $|A|^n$.
(**iii**) Um conjunto F_A de funções n-árias de $|A|^n$ em $|A|$.

Por exemplo, podemos considerar a estrutura N constituída por: (**i**) conjunto dos números naturais, com (**ii**) os predicados binários "x é menor que y" (denotada por $<$) e "x é maior que y" (denotada por $>$) e (**iii**) com as funções adição (denotada por $+$) e multiplicação (denotada por **.**). Neste caso, (**i**) $|N|$ é o conjunto dos números naturais, (**ii**) $P_A = \{<, >\}$ e (**iii**) $F_A = \{+, .\}$.

Notação 1.4. Escrevemos $< |A|, P_A, F_A >$ para denotar a estrutura matemática específica A, constituída pelo conjunto $|A|$, pelo conjunto de predicados n-ários P_A e pelo conjunto de funções n-árias F_A.

Ocasionalmente, os conjuntos P_A e F_A podem ser vazios, finitos ou infinitos.

Por fim, pela Definição 1.5, podemos ainda considerar que os predicados n-ários e as funções n-árias podem ser considerados, eles próprios, estruturas matemáticas. Com efeito, temos que, ocasionalmente, o conjunto P_A de predicados e o conjunto F_A de funções de uma estrutura A podem ser vazios. No caso de um predicado n-ário P, po-

---

Lógica Matemática, está definida em termos de linguagens de primeira ordem. Nesse caso, o autor faz, na definição de estrutura, um mapeamento que leva cada símbolo não lógico (símbolos predicativos n-ários e símbolos funcionais n-ários) da linguagem a predicados n-ários e funções n-árias da estrutura para a linguagem. Por outro lado, para tratarmos o estudo das estruturas lógico-matemáticas em termos de operações parciais unitárias, como faremos neste livro, é suficiente considerar a estrutura como conjuntos de indivíduos, de predicados n-ários e de funções n-árias e, para tal, não é necessária, por hora, a definição de linguagem de primeira ordem.

demos considerar que P determina biunivocamente uma estrutura A_P cujo domínio são os elementos relacionados por P, o conjunto de predicados é o conjunto unitário $\{P\}$ constituído apenas por esse predicado P e o conjunto de funções n-árias é vazio. Analogamente, no caso de uma função n-ária f, podemos considerar que f determina biunivocamente a estrutura A_f, cujo domínio são os elementos que se encontram no domínio e contradomínio de f (que, neste caso, será considerado o próprio conjunto A, uma vez que F_A é um conjunto de funções n-árias de $|A|^n$ em $|A|$), o conjunto de predicados é vazio e o conjunto de funções é o conjunto unitário $\{f\}$constituído apenas por essa função f.

Temos então os seguintes resultados particulares importantes para nossas análises posteriores.

Proposição 1.1. Os predicados n-ários são estruturas matemáticas.

Proposição 1.2. As funções n-árias são estruturas matemáticas.

Vemos assim como uma estrutura matemática pode ser definida de modo completamente geral e abstrato, considerando-se apenas um conjunto de indivíduos, os predicados n-ários e as funções n-árias entre eles.

Estruturas matemáticas específicas e operações parciais unitárias

Introduziremos primeiramente a definição de operação parcial unitária e mostraremos como uma estrutura matemática específica A pode ser considerada como constituída de conjuntos de conjuntos de operações parciais unitárias no conjunto de indivíduos de A.

Uma operação matemática[5] pode ser considerada um procedimento sobre certos elementos. Usualmente, define-se operação matemática a partir da noção de função, mas introduziremos essa definição aqui a partir da noção de mapeamento, mais básica neste livro.

Definição 1.6. Dado um conjunto A, uma operação matemática n-ária em A é um mapeamento do conjunto de n-uplas em A para o próprio A.

Por exemplo, a operação adição, no conjunto dos números naturais, atribui ao par ordenado (2,3) o número natural 5. Notemos então que as funções sucessor s, adição $+$ e multiplicação $.$ citadas anteriormente são operações matemáticas no conjunto dos números naturais, sendo que a operação s é uma operação unária, e as operações $+$ e $.$ são operações binárias.

Notemos então que uma operação matemática em A é uma função (Definição 1.4) n-ária de A^n em A.

Além disso, é condição necessária que uma operação n-ária tenha, para cada elemento ou n-upla do domínio, um e somente um elemento correspondente no contradomínio. No entanto, podemos considerar certos tipos de operações que não estão definidas para todos esses elementos, o que leva à definição a seguir.

Definição 1.7. Dado um conjunto A, seja B um subconjunto de A^n; uma operação matemática parcial n-ária em A é um mapeamento de B em A, atribuindo, a cada n-upla pertencente a B (e cada n-upla pertencente a B é uma

5 O adjetivo "matemática" será usado para distinguir os dois diferentes usos da noção de operação neste livro: utilizaremos "operação matemática" para designar as operações em Lógica e Matemática, no sentido que será definido a seguir, e simplesmente "operação" para designar as operações mentais estudadas pela Epistemologia Genética.

n-upla pertencente a A^n), um elemento correspondente em A.

Notemos que uma operação matemática parcial n-ária em A pode não estar definida para todos os elementos de A^n. Por exemplo, a operação divisão, no conjunto dos números racionais, é uma operação parcial binária, pois não está definida para os casos em que o divisor é igual a zero.

Um aspecto importante para este livro é que n-uplas em A denotam tipos particulares de operações matemáticas parciais em A, como veremos a seguir.

Definição 1.8. Dado um conjunto A não vazio, seja B um subconjunto unitário de A^n. Uma operação matemática parcial unitária e n-ária em A é um mapeamento de B em A, atribuindo à n-upla pertencente a B (que é uma n-upla em A) um único elemento de A. Em outras palavras, uma operação matemática parcial unitária em A é um mapeamento de apenas uma n-upla pertencente a A^n para um elemento de A.

Assim, uma operação matemática parcial unitária está definida apenas para uma n-upla pertencente a $|A|^n$.

Notação 1.5. A operação parcial unitária que atribui o valor a_{n+1} à n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ será denotada por $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$.

Por exemplo, o par (a_1, a_2) denota a operação matemática parcial definida apenas para o elemento a_1, cujo valor, pela operação parcial, é o elemento a_2; ou ainda, o par $(0,1)$ denota a operação matemática parcial (operação sucessor, por exemplo) no conjunto dos números naturais, definida apenas para o elemento 0, cujo valor, pela operação parcial, é o elemento 1.

Notemos que a notação anterior implica, por outro lado, que toda n-upla pertencente a $|A|^n$ denota uma operação parcial unitária em A: a n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ denota a operação parcial unitária que atribui à $(n\text{-}1)$-upla $(a_1, a_2, \ldots,$

a_{n-1}) o valor a_n, e ela é parcial, pois está definida somente para a $(n\text{-}1)$-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ do domínio $|A|^{n-1}$.

Esse resultado permite correlacionar as operações parciais unitárias com as estruturas matemáticas. Vejamos como.

A partir da Definição 1.5, temos as seguintes proposições.

Proposição 1.3. P_A é um conjunto de conjuntos de operações matemáticas parciais unitárias em $|A|$.

Demonstração. Por definição, como um predicado n-ário de $|A|^n$ é um subconjunto do conjunto de n-uplas em $|A|$, então o conjunto P_A é um conjunto de subconjuntos de n-uplas de $|A|^n$. Como vimos anteriormente, as n-uplas de $|A|^n$ denotam operações matemáticas parciais unitárias em $|A|^{n-1}$. Portanto, P_A é um conjunto de conjuntos de operações parciais unitárias em $|A|$.

Por exemplo, consideremos a estrutura dos números naturais com os predicados binários "x menor que y" (designado por $<$) e "x maior que y" (designado por $>$). Nesse caso, temos para esses predicados, respectivamente, os conjuntos $< = \{(0,1), (0,2), (1,2),...\}$ e $> = \{(1,0), (2,0), (2,1),...\}$. Assim, nessa estrutura, $P_A = \{<, >\} = \{\{(0,1), (0,2), (1,2),...\}, \{(1,0), (2,0), (2,1)\ (0,2), (1,2), (2,2)\ldots\}\}$, e vemos claramente que P_A é um conjunto de conjuntos de operações parciais unitárias denotadas por (0,1), (0,2), (1,2),..., (1,0), (2,0) etc.

Proposição 1.4. F_A se constitui como um conjunto de conjuntos de operações matemáticas parciais unitárias em $|A|$.

Demonstração. Por definição, uma função n-ária f de $|A|^n$ em $|A|$ é uma atribuição de um valor a em $|A|$ para cada n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $|A|^n$. Assim, para cada atribuição por f de um valor a em $|A|$ para cada n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ está associada univocamente a operação parcial unitária

$(a_1, a_2, \ldots, a_n, a)$ pertencente a $|A|^{n+1}$. Logo, à função f está associado univocamente um conjunto de operações parciais $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a)$, para o qual $a = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Portanto, se F_A é um conjunto de funções n-árias de $|A|^n$ para |A|, então temos que F_A se constitui como um conjunto de conjuntos de operações matemáticas parciais unitárias em $|A|$.

Por exemplo, consideremos a estrutura com as funções + (adição) e . (multiplicação) no conjunto dos números naturais. Nesse caso, a operação adição constitui o conjunto de operações parciais $(x,y, x+y)$, isto é, {(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,2), ...}, onde cada terna do conjunto é uma operação parcial unitária. Do mesmo modo, a operação multiplicação constitui o conjunto de operações parciais $(x,y, x.y)$, isto é, {(0,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1), ...} e, novamente, cada terna do conjunto é uma operação parcial ou função unitária. Logo, o conjunto $F_A = \{+, .\}$ constitui o conjunto {{(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,2), ...},{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1), ...}} que, claramente, é um conjunto de conjuntos de operações parciais unitárias denotadas por (0,0,0), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,1), (1,1,2) etc.

A partir dos resultados apresentados, temos o seguinte resultado geral, que será central para este livro, pois permite relacionar o conceito de estrutura matemática com o de estrutura epistêmico-psicológica em Epistemologia Genética.

> Uma estrutura matemática específica A pode ser considerada como constituída por conjuntos de conjuntos de operações parciais unitárias em $|A|$.

Notemos, por fim, que, assim como um predicado n-ário ou uma função n-ária podem ser considerados estruturas matemáticas específicas, como vimos, uma operação parcial n-ária unitária $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$ também pode ser considerada uma estrutura matemática especí-

fica. Na medida em que uma operação parcial n-ária unitária $(a_1, a_2,\dots, a_n, a_{n+1})$ pode ser considerada uma relação $(n+1)$-ária unitária, ou seja, o conjunto $\{(a_1, a_2,\dots, a_n, a_{n+1})\}$, a operação parcial n-ária unitária $(a_1, a_2,\dots, a_n, a_{n+1})$ determina univocamente a estrutura A, cujo domínio é $\{a_1, a_2,\dots, a_n, a_{n+1}\}$, o conjunto de predicados é $\{\{(a_1, a_2,\dots, a_n, a_{n+1})\}\}$ e o conjunto de funções n-árias é vazio.

Temos então o seguinte resultado particular, que será importante para nossas análises posteriores.

Proposição 1.5. As operações parciais unitárias são estruturas matemáticas.

Introduzidas as estruturas matemáticas específicas e os resultados a elas relacionados, vamos tratar a seguir outro tipo de estrutura matemática mais geral.

A estrutura de grupo e as estruturas matemáticas abstratas

Nesta parte, primeiramente introduziremos uma das mais importantes estruturas estudadas em Matemática: a estrutura de grupo. Em seguida, trataremos a noção de estrutura matemática abstrata, introduzida através da noção de sistema abstrato de Kleene (1952), para mostrar que o grupo é uma estrutura matemática abstrata.

A estrutura de grupo[6]

Antes de apresentarmos as definições e os exemplos de grupos, consideremos a estrutura cujos indivíduos são os números inteiros Z apenas com a operação de adição $+$.

6 A exposição da estrutura algébrica de grupo, neste livro, foi inspirada no livro *Estruturas algébricas* (Nascimento; Feitosa, 2013, p.37).

Podemos elencar algumas propriedades da adição, como se segue.

G0) Para todo a e b em Z, $(a + b)$ está em Z (fechamento).
G1) Para todo a em Z, existe 0 em Z, tal que $a + 0 = 0 + a = a$ (elemento neutro).
G2) Para todo a em Z, existe $-a$ em Z, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (elemento inverso ou simétrico).
G3) Para todo a, b, c em Z, $a + (b + c) = (a + b) + c$ (associatividade).

Se considerarmos a operação de adição em estruturas nas quais os conjuntos de indivíduos são os números racionais, os números reais, os números complexos ou as matrizes reais $m \times n$, as propriedades anteriores permanecem válidas. Existem muitos outros exemplos de estruturas com operações que satisfazem essas quatro propriedades (vejam-se os exemplos 1.1 e 1.2 a seguir), o que justifica um estudo genérico de estruturas com uma operação que satisfaz tais propriedades: são os grupos matemáticos, estudados pela teorias dos grupos, conceito que surgiu do estudo de equações polinomiais realizado por Évariste Galois em 1832.

Definição 1.9. Sejam G um conjunto não vazio e $*$ uma operação binária em G. Dizemos que $(G, *)$ é um grupo se as seguintes condições são satisfeitas:

G1) Existe e em G tal que, para todo a em G, $a * e = e * a = a$ (elemento neutro).
G2) Para todo a em G, existe b em G, tal que $a * b = b * a = e$ (elemento inverso).
G3) Para quaisquer a, b, c em G, $a * (b * c) = (a * b) * c$ (associatividade).

Ao dizer que $*$ é uma operação binária em G, a propriedade do fechamento (G0), introduzida anteriormente,

é pressuposta, pois uma operação binária é uma função binária e, logo, está definida para todos os elementos do domínio, ou seja, para todo a, b em G, $(a * b)$ está em G.

Um grupo $(G, *)$ é abeliano ou comutativo se vale a propriedade:

G4) Para todo a, b em G, $a * b = b * a$ (comutativa).

Exemplo 1.1. Tomemos o conjunto $Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}: a, b \text{ em } Z\}$. Temos que $Z[\sqrt{2}]$ com a operação de adição é um grupo abeliano.

G0) Para mostrar que a propriedade de fechamento é satisfeita, precisamos mostrar que o resultado da adição de dois elementos do conjunto (isto é, com a forma $a + b\sqrt{2}$, com a, b em Z) está no conjunto (isto é, tem a forma $a + b\sqrt{2}$, com a, b em Z). Sejam então x, y em $Z[\sqrt{2}]$. Temos então que: $x + y = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = a + c + (b + d)\sqrt{2}$, e como $(a + c) + (b + d)\sqrt{2}$ está em $Z[\sqrt{2}]$, pois $a + c$ e $b + d$ estão em Z, G0 é satisfeita.
G1) Existe em $Z[\sqrt{2}]$ um elemento neutro para a adição, pois $0 + 0\sqrt{2}$ é um elemento de $Z[\sqrt{2}]$ e $0 + 0\sqrt{2} = 0$, que é elemento neutro para a adição em R.
G2) Para todo x em $Z[\sqrt{2}]$, existe em $Z[\sqrt{2}]$ um elemento inverso de x para a adição, pois, se x tem a forma $(a + b\sqrt{2})$, com a, b em Z, então existe em $Z[\sqrt{2}]$ o elemento $-x = -(a + b\sqrt{2}) = -a + (-b)\sqrt{2}$, tal que $x + (-x) = (-x) + x = x - x = 0$.
G3) A associatividade é válida para o conjunto $Z[\sqrt{2}]$ com a operação adição, pois, como os elementos de $Z[\sqrt{2}]$ são elementos de R[7] e a associatividade é válida para a adição em R, então ela é válida para a adição em $Z[\sqrt{2}]$.

---

7 R é o conjunto dos números reais. Como podemos verificar, esse conjunto, munido da operação usual de adição +, é um grupo, pois satisfaz as quatro propriedades enunciadas na Definição 1.9.

Vemos assim que $Z[\sqrt{2}]$ com a adição é um grupo. $Z[\sqrt{2}]$ é abeliano, pois a adição em R é comutativa.

Exemplo 1.2. Qualquer conjunto $\{a + br$, com a, b em $Z\}$ em que r é um número irracional com a operação adição é um grupo. A demonstração desse enunciado é análoga àquela do exemplo anterior, que é um caso particular desse enunciado com $r = \sqrt{2}$.

Exemplo 1.3. $(N, +)$, no qual N é o conjunto dos números naturais, não é um grupo, pois, por exemplo, 1 é um elemento de N, mas não existe um número n em N tal que $1 + n = 0$. Em outras palavras, $(N, +)$ não admite elemento inverso.

Os grupos matemáticos apresentam algumas propriedades que podem ser facilmente demonstradas a partir das propriedades apresentadas. Se $(G, *)$ é um grupo, então podemos demonstrar, por exemplo, que: (**i**) o elemento neutro de $(G, *)$ é único; (**ii**) para todo elemento a do domínio de $(G, *)$, o elemento inverso de a é único; e (**iii**) dada uma equação $a * b = c$, sempre podemos isolar um elemento do domínio de $(G, *)$ da equação, pois, para todo a, b, c em G, se $a * b = c$, então $a = c * b^{-1}$ e $b = a^{-1} * c$, nas quais a^{-1} e b^{-1} são, respectivamente, os elementos inversos de a e b.

Estruturas matemáticas abstratas

O estudo das estruturas matemáticas, em especial dos grupos, nos conduz ao estudo das estruturas matemáticas abstratas, que apresentamos por meio da noção de estrutura de sistemas de objetos abstratos de Kleene (1952),

---

Assim, $< R, + >$ é uma estrutura de grupo. Notemos também que $< R, + >$ é um grupo abeliano.

autor que define sistemas de objetos como sendo constituídos “[...] por um conjunto ou classe ou domínio D (não vazio) [...] de objetos, entre os quais são estabelecidas certas relações” (p.25).

No entanto, tais objetos podem não ser diretamente reconhecidos por meio de suas características específicas. Nesse caso, não temos uma especificação do que os objetos são, apenas os conhecemos através de algumas propriedades das relações (mais exatamente, propriedades dos predicados n-ários e funções n-árias) que eles estabelecem entre si. Tais considerações nos conduzem à definição de sistemas de objetos abstratos. Segundo Kleene (1952):

> Quando os objetos são conhecidos apenas através das relações do sistema, o sistema é *abstrato*. O que é estabelecido neste caso é a *estrutura* do sistema, e o que os objetos são, em quaisquer aspectos, exceto como se combinam no interior da estrutura, é deixado indeterminado. (p.25)

Assim, consideraremos que uma estrutura matemática abstrata é um conjunto de propriedades formais dos predicados n-ários e das funções n-árias das estruturas matemáticas específicas, tais como definidas anteriormente. Lembremos que uma estrutura matemática específica é constituída por um conjunto de indivíduos, funções n-árias e predicados n-ários. Assim, uma estrutura matemática abstrata diz respeito às propriedades formais das relações das estruturas matemáticas específicas. Para simplificar, neste livro consideraremos apenas estruturas matemáticas abstratas cujas propriedades formais podem ser expressas por axiomas em alguma teoria formal.

Por exemplo, as propriedades G0, G1, G2 e G3 da Definição 1.9 definem a estrutura matemática abstrata de grupo.

Introduzidas as noções de estrutura matemática, tanto a específica quanto a abstrata, passaremos a seguir a discutir a noção de formas matemáticas, como será considerada neste livro.

Formas matemáticas

Como definidas anteriormente, a estrutura matemática específica e a estrutura matemática abstrata serão consideradas aqui formas matemáticas.

Quanto às estruturas matemáticas específicas, como veremos a seguir, nós as consideraremos uma forma matemática no sentido expresso por Piaget e outros autores: "O termo estrutura é empregado aqui no seu sentido clássico (Russell-Whitehead) de conjunto das propriedades e relações comuns aos sistemas isomórficos" (Apostel et al., p.44, nota de rodapé).

Para melhor compreender como as estruturas matemáticas específicas constituem uma forma matemática, vamos introduzir a definição de isomorfismo entre essas estruturas. Antes, algumas definições mostram-se necessárias.

Definição 1.10. Dada uma função f de A em B, A é denominado domínio de f, B é o contradomínio de f, e a imagem de f é o conjunto $Im(f) = \{b \in B; b = f(a)$ para algum $a \in \mathrm{A}\}$. Notemos que $Im(f)$ é subconjunto de B.

Definição 1.11. Uma função f é sobrejetiva quando $Im(f) = B$. A função f é injetiva quando, para x, y pertencentes ao domínio da função, se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$. A função f é bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva.

Notemos que, se a função f: $A \rightarrow B$ é bijetiva, então: (**1**) por ela ser injetiva, temos associado a cada elemento da imagem apenas um elemento do domínio (pois, por contraposição da propriedade que define a função injetiva,

temos que, se $f(x) = f(y)$, então $x = y$); (**2**) por ela ser sobrejetiva, cada elemento do contradomínio B está associado a um elemento do domínio A, já que o contradomínio e a imagem de f coincidem (pois, como f é sobrejetiva, então $Im(f) = B$); logo, (**3**) podemos atribuir a cada elemento y do contradomínio B um elemento x do domínio A, tal que $f(x) = y$, ou seja, é possível definir uma função inversa f^{-1} tal que $y = f^{-1}(x)$.

Definição 1.12. Dizemos que duas estruturas $< |A|, P_A, F_A >$ e $< |A'|, P_{A'}, F_{A'} >$ são isomorfas e denotamos por $A \equiv A'$ se existe uma função bijetiva I de $|A|$ U P_A U F_A em $|A'|$ U $P_{A'}$ U $F_{A'}$, tal que as condições a seguir são satisfeitas.[8]

(**i**) I restrita ao conjunto $|A|$ estabelece uma bijeção com o conjunto $|A'|$, ou seja, a cada elemento a de $|A|$ está associado um elemento $I(a)$ em $|A'|$ e, inversamente, a cada elemento a' de $|A'|$ está associado um elemento $I^{-1}(a')$ em $|A|$.

(**ii**) Para cada predicado n-ário p em P_A, existe um predicado p' n-ário em $P_{A'}$, tal que $p' = I(p)$ e $p(a_1, a_2,..., a_n)$ se, e somente se, $p'(I(a_1), I(a_2),..., I(a_n))$.

Notemos que, como I é uma bijeção, então a condição (**ii**) implica que, para cada predicado n-ário p' em $P_{A'}$, existe um predicado p n-ário em P_A, tal que $p = I^{-1}(p')$ e $p'(a_1, a_2,..., a_n)$ se, e somente se, $p(I^{-1}(a_1), I^{-1}(a_2),..., I^{-1}(a_n))$.

(**iii**) Para cada função n-ária f em F_A existe uma função f' n-ária em $F_{A'}$,tal que $f' = I(f)$ e $I(f(a_1, a_2,..., a_n)) = f'(I(a_1), I(a_2),..., I(a_n))$.

Notemos que, como I é uma bijeção, então a condição (**iii**) implica que, para cada função n-ária f' em $F_{A'}$, existe uma função f n-ária em F_A, tal que $I^{-1}(f'(I(a_1), I(a_2),..., I(a_n))) = f(I^{-1}(a_1), I^{-1}(a_2),..., I^{-1}(a_n))$.

8 U designa a operação união usual entre conjuntos.

Definição 1.13. A função I da definição anterior é chamada de um isomorfismo entre as estruturas $< |A|, P_A, F_A >$ e $< |A'|, P_{A'}, F_{A'} >$.

Agora é possível discutir a noção de uma estrutura matemática específica como uma forma matemática.

Podemos considerar que uma estrutura matemática específica $< |A|, P_A, F_A >$ constitui uma forma matemática: o conjunto das propriedades dos predicados n-ários e das funções n-árias comuns a todas as estruturas isomorfas a $< |A|, P_A, F_A >$. Se duas estruturas são isomorfas entre si, então, do ponto de vista das teorias que tratam de estruturas, elas não diferem uma da outra quanto à forma, uma vez que a bijeção entre elas preserva suas relações, identificando suas propriedades. Dada uma estrutura matemática específica $< |A|, P_A, F_A >$, podemos associar a ela uma estrutura matemática específica geral: a forma da estrutura $< |A|, P_A, F_A >$ (comum a todas as estruturas específicas isomorfas a $< |A|, P_A, F_A >$). Nesse sentido, toda estrutura matemática específica constitui uma forma matemática, a saber, a estrutura matemática específica geral comum a todas as estruturas isomorfas a ela.

Tratemos agora das estruturas matemáticas abstratas como formas matemáticas.

As estruturas matemáticas específicas, como definidas anteriormente, são uma especificação das estruturas matemáticas abstratas. De acordo com Kleene (1952):

> Então, qualquer especificação adicional do que os objetos são dá uma *representação* (ou *modelo*) do sistema abstrato, isto é, um sistema de objetos que satisfaz as relações do sistema abstrato e tem também algum outro *status*. (p.25)

Para uma estrutura matemática abstrata definida por axiomas, há três casos, como analisa o autor (1952):

> Então três casos surgem. Os axiomas podem não ser satisfeitos por nenhum sistema de objetos [...], ou por exatamente um sistema abstrato, quaisquer dois sistemas que satisfaçam [os axiomas] são isomorfos [entre si]; ou por mais de um sistema abstrato, i.e., existem sistemas não isomorfos que satisfazem [os axiomas...]. No primeiro caso, podemos chamar de *vácuo* o conjunto de axiomas; nos outros dois casos, de *não vácuo*; além disso, no segundo caso, *categórico* [...] e, no terceiro, *ambíguo*. (p.27)

As estruturas categóricas são as estruturas matemáticas abstratas que têm uma identidade definida pelos axiomas a menos de um isomorfismo, pois todas as estruturas que têm a forma matemática descrita pelos axiomas são isomorfas entre si. Podemos dizer que tais axiomas definem uma única forma matemática, e que esta forma é uma estrutura matemática específica.

Quanto às estruturas matemáticas abstratas ambíguas, elas são formas comuns às estruturas matemáticas específicas que satisfazem o mesmo conjunto de axiomas, mas que não são isomorfas entre si. No entanto, mesmo nesse caso podemos falar de uma única forma matemática, justamente as propriedades abstratas definidas pelos axiomas. Assim, consideramos que a estrutura matemática abstrata corresponde a uma única forma matemática de tais estruturas. Em outras palavras, temos, para conteúdos matemáticos distintos, a mesma forma matemática.

Nesse sentido, apesar de a estrutura (matemática abstrata) de grupo ser ambígua, pois, como vimos, temos várias estruturas específicas que satisfazem os axiomas de grupo e que não são isomorfas entre si (e, logo, não definem uma estrutura geral), vamos considerar a existência de uma estrutura matemática de grupo, supondo unicidade, já que se trata da mesma forma para conteúdos matemáticos distintos.

Podemos, pois, concluir esta parte com a seguinte afirmação:

> Uma forma matemática é uma estrutura matemática específica ou abstrata. Em particular, como as funções e predicados n-ários são estruturas matemáticas específicas, então também são formas matemáticas.

Do exposto, torna-se mais claro o problema que colocamos de início: Como, segundo a Epistemologia Genética, somos capazes de compreender as estruturas matemáticas (específicas e abstratas)? Qual a relação entre as estruturas matemáticas e as estruturas epistêmico-psicológicas do sujeito epistêmico? No próximo capítulo, faremos algumas considerações iniciais para estabelecer tal relação.

2
As estruturas epistêmico-psicológicas e uma de suas formas no período sensório-motor

Então é preciso dizer, e isto em todos os níveis, que a ação – ponto de partida comum das intuições imaginadas e das operações – acrescenta algo ao real, ao invés de simplesmente extrair (ou, como se diz, de "abstrair") os elementos de sua própria construção.

(Piaget, 1946, p.31)

Neste capítulo, apresentaremos alguns elementos da teoria de Piaget que dizem respeito ao período sensório-motor e mostraremos que, já na estruturação sensório-motora, existem formas matemáticas. Começaremos com duas noções fundamentais da Epistemologia Genética, que são conceitos centrais para o presente livro: a definição de estrutura para Piaget e a noção de estrutura epistêmico-psicológica. Também apresentaremos a estrutura grupo prático de deslocamentos, introduzida por Piaget (1970; 1978; 2008) e por Piaget e Inhelder (2002) e explicitada por Marçal e Tassinari (2013). Por fim, argumentaremos que o sujeito, no período sensório-motor, já possui uma estruturação que comporta uma forma mate-

mática, a qual, por sua vez, é fundamental para as construções ulteriores, ainda que tal forma seja inconsciente para esse sujeito.

As estruturas epistêmico-psicológicas

Iniciaremos esta parte com as duas noções fundamentais da Epistemologia Genética centrais para este livro: a de estrutura para Piaget e a de estrutura epistêmico-psicológica.

Começaremos com uma breve descrição de algumas das principais propostas epistemológicas do construtivismo de Piaget, para então apresentarmos a definição de estrutura e darmos alguns exemplos de estruturas epistêmico-psicológicas, iniciando pelo grupo prático de deslocamentos (GPD).

Segundo Piaget (1971), a Epistemologia Genética tem como propostas: (**i**) descobrir a gênese dos diversos conhecimentos, isto é, "pôr a descoberto as raízes das diversas variedades de conhecimento" (p.14); e (**ii**) analisar a evolução desses conhecimentos, desde as suas apresentações mais elementares até o conhecimento e o raciocínio científico. Preocupa-se, por conseguinte, em saber como ocorre a passagem de estado de um conhecimento inferior para outro superior, considerando não somente os conhecimentos individuais, mas levando em conta uma análise histórico-crítica da ciência, ou seja, o progresso de todo o conhecimento científico. Piaget (1971) escreve:

> Ora, como toda ciência está em permanente transformação e não considera jamais seu estado como definitivo, [...] este problema genético, no sentido amplo, engloba também o do progresso de todo conhecimento científico. (p.14)

Além disso, ele considera a Epistemologia Genética um campo de conhecimento de natureza interdisciplinar, uma vez que suscita, ao mesmo tempo, questões de fato e de validade. Caso se tratasse apenas de questões de fato, seria o mesmo que reduzir a epistemologia "a uma psicologia das funções cognitivas e esta não é competente para resolver questões de validade" (Piaget, 1973, p.14). Caso se tratasse, por outro lado, somente de questões de validade, ela se confundiria com a Lógica, sendo que "o problema não é puramente formal, mas chega a determinar como o conhecimento atinge o real" (p.14) e, portanto, preocupa-se com as relações que o sujeito estabelece com o seu meio.

Nesses moldes, Piaget sustenta a ideia de que a Epistemologia Genética é a teoria do conhecimento que suscita, necessariamente, dois tipos de questões, as de fato e as de validade,[1] e, justamente por isso, foram necessárias suas pesquisas em Psicologia Genética para que esta pudesse contribuir para o campo da Epistemologia. Segundo o próprio autor (1973):

> O primeiro objetivo que a Epistemologia Genética persegue é, pois, por assim dizer, de levar a Psicologia a sério e fornecer verificações em todas as questões de fato que cada Epistemologia suscita necessariamente, mas substituindo a Psicologia especulativa [...] por meio de análises controláveis. (p.13)

1 No que se refere às questões de fato, Piaget (1971) busca entender e explicitar o "[...] estado dos conhecimentos em um nível determinado e a passagem de um nível ao seguinte". Já acerca das questões de validade, ele faz uma "avaliação dos conhecimentos em termos de aprimoramento ou de regressão, estrutura *formal* dos conhecimentos" (p.14, grifo nosso).

É justamente nas suas pesquisas em Psicologia Genética que encontramos a explicitação dos fatos que estão ligados ao desenvolvimento do sujeito epistêmico, o sujeito do conhecimento, por meio de sua ação sobre o objeto.

Logo, em linhas gerais, o que Piaget chama de Epistemologia é o estudo do conhecimento que se estabelece na relação entre indivíduo e objeto, por meio da interação entre ambos, bem como o estudo do conhecimento científico, de sua gênese e de seu desenvolvimento.

Segundo a Epistemologia Genética, a gênese e o desenvolvimento desse conhecimento acontecem por meio de estruturas que são necessárias para que o sujeito epistêmico se desenvolva e venha a conhecer. No entanto, para Piaget (1971), "[...] o conhecimento não poderia ser concebido como algo predeterminado nas estruturas internas do indivíduo", tampouco "[...] nos caracteres preexistentes do objeto, pois estes só são conhecidos graças à mediação necessária dessas estruturas" (p.13).[2] Essas estruturas, portanto, se constroem mediante a interação que o sujeito realiza, por meio de sua ação sobre o objeto, de diversas formas.

A noção de estrutura, em Piaget, remete a um sistema de relações no qual são estabelecidas certas noções sistêmicas: a de totalidade (o todo não é apenas a soma de suas partes), a de autorregulação (uma estrutura estabelece um

---

2 Essas concepções englobam a crítica que Piaget (1973) faz ao apriorismo e ao empirismo, de forma geral. Sobre o apriorismo, *grosso modo*, ele sustenta que existem, sem dúvida, certas "tendências especulativas e [...] desprezo da verificação efetiva", sendo que, com relação às formas *a priori*, "não basta analisar a consciência dos sujeitos, mas suas condições preliminares" (p.12). No que diz respeito ao empirismo, ele sustenta que, "se se quiser abranger o conjunto dos conhecimentos apenas pela 'experiência', não se pode justificar tal tese senão procurando analisar o que é experiência e acaba-se então por recorrer às percepções, às associações e aos hábitos, que são processos psicológicos" (p.11).

sistema fechado e qualquer relação entre seus elementos resulta, por assim dizer, num elemento próprio dele) e transformação (pela qual, *grosso modo*, existe a possibilidade de o sistema se organizar e passar de um estado de menor complexidade a um estado de maior complexidade). Segundo o próprio Piaget (1979):

> Uma estrutura é um sistema de transformações que comporta leis enquanto sistema [...] e que se conserva ou se enriquece pelo próprio jogo de suas transformações, sem que estas conduzam para fora de suas fronteiras ou façam apelo a elementos exteriores. Em resumo, uma estrutura compreende os caracteres de totalidade, de transformações e de autorregulação. (p.6)

Essa concepção estrutural, bem como a noção de que o conhecimento é construído pelo sujeito por meio de sua interação com o objeto, ambas presentes na teoria piagetiana, nos fornecem ferramentas relevantes para uma possível formalização e solução do problema proposto sobre a análise do conhecimento científico por meio de uma exploração lógico-matemática. Sobre isso, Piaget (1979) afirma:

> De modo tal que um dos meios mais instrutivos para analisar as suas ações é construir, em equações ou em máquinas, modelos de "inteligência artificial" e fornecer delas uma teoria cibernética para atingir as condições necessárias e suficientes, não de sua estrutura em abstrato (a álgebra faz isto), mas de sua realização efetiva e de seu funcionamento. (p.37)

Sobre a noção geral de estrutura, Ramozzi-Chiarottino (1972) afirma que, de acordo com Piaget, "[...] há estrutura quando os elementos estão reunidos em uma

totalidade, apresentando certas propriedades enquanto totalidade, e quando as propriedades dos elementos dependem inteira ou parcialmente das características da totalidade" (p.14).

Com essa apresentação e com a discussão de alguns elementos da Epistemologia Genética de Jean Piaget, podemos, pois, chegar ao entendimento de estruturas que são necessárias ao conhecimento do sujeito epistêmico, isto é, as estruturas epistêmico-psicológicas, as quais, segundo os estudos dele e de seus colaboradores, se constroem através da interação entre o sujeito e o seu meio.

Por definição: "A estrutura mental [que denominamos estrutura epistêmico-psicológica] é a estrutura orgânica responsável pela capacidade humana de estabelecer relações, condição de todo conhecimento possível" (Ramossi--Chiarottino, 1984, p.34). Nesse sentido, damos o nome de estrutura epistêmico-psicológica (ou estrutura mental) àquelas estruturas que surgem da organização das atividades do sujeito ao interagir com o objeto em um contexto de experiência (seja física ou lógico-matemática, seja por meio de ações ou de operações).[3]

A teoria de Piaget procura explicar como o sujeito em desenvolvimento conquista as estruturas necessárias ao conhecimento, desde o seu nascimento, no primeiro período, concebido como nível sensorial-motor, passando pelos níveis intermediários e chegando até o último nível, o do período das operações teóricas, presentes na ciência contemporânea, por exemplo. Sobre essa concepção de desenvolvimento, Piaget (1979) escreve:

---

3 Tal denominação nos parece necessária para distinguir da noção de estruturas matemáticas específicas e abstratas, definidas no capítulo anterior. Ambas as formas de estrutura possuem as características da estrutura, em sentido amplo, segundo Piaget, como citado anteriormente: totalidade, transformações e autorregulação.

> Certamente, as estruturas humanas não partem do nada e, se toda estrutura é o resultado de uma gênese, é preciso admitir resolutamente, em vista dos fatos, que uma gênese constitui sempre a passagem de uma estrutura mais simples a uma estrutura mais complexa e isso segundo uma regressão infinita [...]. Há, portanto, dados de partida a assinalar à construção das estruturas lógicas, porém, não são nem primeiros, já que marcam apenas o início de nossa análise, em falta de poder remontar mais alto, nem estão já na posse daquilo que será, ao mesmo tempo, tirado delas e apoiado sobre elas na sequência da construção. (p.34)

Além disso, devido ao caráter interacionista da teoria de Piaget, isto é, à forma como o conhecimento emerge da relação que o sujeito estabelece com o meio, modificando-o e sendo modificado por ele, a ação constitui um dos fundamentos para o conhecimento do sujeito e, por conseguinte, é essencial para a teoria epistemológica.

Segundo Piaget (1973), o conhecimento não está na cópia do real, mas sim em "agir sobre ele e transformá-lo [...] em função dos sistemas de transformação aos quais estão ligadas estas ações" (p.15).

Nesse contexto, "é ação toda conduta (observável exteriormente, inclusive por interrogatório clínico) visando a um objetivo do ponto de vista do sujeito considerado" (Apostel et al., 1957, p.43). Tais condutas observáveis acontecem "[...] quando qualquer coisa, fora de nós ou em nós (no nosso organismo físico ou mental), se modificou" (Piaget, 2001, p.15). Trata-se, por isso, de um reajustamento de conduta devido à mudança ocasionada pelo meio. Assim, para o autor:

> A ação é desequilibrada pelas transformações que aparecem no mundo, exterior ou interior, e cada nova

> conduta vai funcionar não só para restabelecer o equilíbrio, como também para tender a um equilíbrio mais estável que o do estágio anterior a esta perturbação. (Piaget, 2001, p.16)

A estrutura das ações possíveis constitui, portanto, a forma de interação que permite ao sujeito conhecer. E, como são estruturas necessárias para a aquisição desse conhecimento, podemos inferir que a estrutura das ações possíveis constitui a forma de interação que possibilita ao sujeito construir as outras estruturas epistêmico-psicológicas e, por isso mesmo, é fundamental na teoria de Piaget.

Na medida em que o sujeito executa ações semelhantes, verifica-se a possibilidade de "repetição"[4] da ação executada, sendo que essa "generalização da ação" é considerada, na teoria de Piaget, um esquema de ação. Por conseguinte, a noção de esquema é pensada como um aspecto estrutural das construções funcionais, as quais se transferem ou generalizam no momento da repetição da ação. Ramozzi-Chiarottino (1972) faz essa alusão de forma clara:

> O esquema é aquilo que é generalizável numa determinação ação. O esquema de sugar corresponde ao saber sugar, independente do que é sugado. Todo esquema tende a assimilar todo objeto, de tal maneira que uma vez construído um certo esquema, o de sugar, por exemplo, a criança tende a sugar tudo o que toca. Posteriormente com a construção dos esquemas de olhar e pegar, tentará

4 A ação, para Piaget, ocorre em determinado tempo e espaço e, logo, não pode ser repetida. No entanto, podemos encontrar um padrão de semelhança nas ações executadas pelo sujeito. Assim, ao "puxar" um cordão, por exemplo, e ao executar novamente essa ação, diz-se que há, nesse caso, um padrão na ação.

> pegar tudo o que olha e a olhar tudo o que pega. Os novos esquemas resultam sempre dos anteriores, na medida que implicam uma coordenação destes últimos. Assim o "saber puxar" depende do "saber pegar" e do "saber olhar", da mesma maneira que os primeiros esquemas, como o de sugar, olhar etc., dependeram de estruturas motoras hereditárias.
>
> [...] O esquema funciona como um conceito prático no sentido de que na presença de um objeto novo a criança tenta assimilá-lo, aplicando-lhe sucessivamente todos os esquemas dos quais dispõe, como se se tratasse de defini-lo pelo uso. (p.10-1)

Segundo Piaget, conforme passamos a dispor, cada vez mais, de esquemas de ação, podemos constatar a generalização desses esquemas pelos processos de assimilação e acomodação, esquematizando essas ações em sistemas que, segundo Ramozzi-Chiarottino (1972), "coordenam as ações e que permitem as classificações dos objetos e as relações entre eles" (p.13). Daí conclui-se que um sistema de esquemas de ação é o nome dado ao conjunto de todos os esquemas de ação dos quais o sujeito dispõe, de forma coordenada. Esta forma pode ser verificada no sentido de que, dentro do sistema, o próprio sujeito coordena os esquemas enquanto interage com o objeto. Essa coordenação dos esquemas pode ser constatada, por exemplo, segundo Ramozzi-Chiarottino (1972), na conduta de uma criança:

> Quando lhe apresentamos um objeto "novo": o objeto será sucessivamente apanhado, chupado, balançado, esfregado etc., como se, para conhecê-lo, a criança tentasse ver em que esquemas se encaixa. Estes esquemas se relacionam entre si de várias formas: tudo que pode ser pegado pode ser olhado, mas a recíproca não é verdadeira; há objetos que podemos pegar e ouvir, outros

> que possuem a primeira propriedade sem a segunda [...]. Em suma, há uma esquematização sensorial motora que comporta uma certa estrutura de "classificação operatória" ainda bem elementar. (p.12)

Na medida em que o sujeito coordena suas ações e, consequentemente, seus esquemas de ações, ele também vai coordenando e complexificando seu sistema de esquemas de ações, de forma que, a cada complexificação, dada sempre por sua interação com o meio, ele consegue organizar o mundo, cada vez mais, culminando na construção do seu real.

Piaget e Inhelder (2002) denominam uma dessas ações de deslocamento (1970; 1978; 2002; 2008). Trata-se da ação que engloba os deslocamentos dos objetos no espaço e os do próprio sujeito. No livro *A construção do real na criança* (1970), Piaget faz uma descrição detalhada da estrutura epistêmico-psicológica que se constitui mediante as interações espaciais que o sujeito realiza enquanto interage com o mundo, qual seja, o grupo prático de deslocamentos. Tal estrutura, construída pelo sujeito, faz parte do seu sistema de esquemas de ação, como descrito, sendo que, a partir da interação com o meio, ele constrói o seu real por meio de esquemas de ação coordenados, constituindo a estrutura mencionada.

Como visto, a ação de deslocar refere-se ao deslocamento dos objetos no espaço, bem como do deslocamento que o próprio sujeito realiza nesse espaço. Piaget (1978) explica: "[...] coordenar ações quer dizer deslocar objetos, e na medida em que esses deslocamentos são submetidos a coordenações, o 'grupo de deslocamentos' [permite] atribuir aos objetos posições sucessivas" (p.8). No que se refere especificamente ao sujeito, ele salienta que, para que os deslocamentos já percebidos (portanto coordenados) sejam representados por esse sujeito,

> [...] é preciso que os objetos submetidos a deslocamento sejam considerados como coisas que se movem em relação recíproca ou em relação a certos pontos de referência; portanto, é imprescindível que se estabeleça entre eles um conjunto de relações espaciais. [Além disso] é preciso que o próprio sujeito se conceba como um objeto entre os demais elementos em jogo e represente os seus próprios deslocamentos como relativos aos das outras coisas. (Piaget, 1970, p.100)

A estrutura grupo prático de deslocamentos, como veremos, se constitui no período sensório-motor, primeiro período do desenvolvimento do sujeito epistêmico considerado por Piaget. Tal período se refere a uma estruturação do real que acontece puramente por meio de ações e esquemas de ações motoras e é anterior a toda e qualquer representação, inclusive a linguagem. Assim, o pensamento, nesse período, consiste nessa coordenação de ações sobre as bases de uma inteligência prática e independe de qualquer tipo de representação. Mais do que isso: esse período se mostra como condição necessária para supor evocações representativas do sujeito, sejam quais forem. Passemos então ao grupo prático de deslocamentos.

Uma estrutura epistêmico-psicológica: o grupo prático de deslocamentos (GPD)

Apresentaremos inicialmente a estrutura epistêmico-psicológica grupo prático de deslocamentos, introduzida por Piaget e Inhelder (1970; 1978; 2002; 2008). Por meio de uma representação vetorial dos deslocamentos e de uma operação que denominaremos de composição de deslocamentos, verificaremos como tal estrutura tem a forma da estrutura matemática de grupo, conforme Definição 1.9.

Deslocamento e composição de deslocamentos

Para a descrição da estrutura epistêmico-psicológica grupo prático de deslocamentos, consideremos inicialmente a seguinte situação, descrita por Piaget (1970):

> Laurent, ao 0; 11 (22),[5] está sentado entre duas almofadas A e B. Escondo, alternadamente, meu relógio sob cada uma delas: Laurent procura constantemente o objeto no lugar onde ele veio a desaparecer, ou seja, tanto em A como em B, sem ficar preso a uma posição privilegiada como no decorrer da fase precedente. (p.67)

Nessa citação, é possível perceber que Laurent considera o deslocamento do objeto (relógio) do ponto A – ponto do qual o objeto partiu – até o ponto B – ponto onde ele desapareceu. Podemos dizer que há um conhecimento prático, pelo sujeito, do deslocamento de A a B do objeto. Tal consideração nos permite perguntar sobre a estrutura dos deslocamentos que a criança coordena, seja de objetos, seja dos seus próprios deslocamentos, e, a partir daí, explicitar[6] a estrutura epistêmico-psicológica grupo prático de deslocamentos.

Iniciaremos pela representação dos pontos do espaço e dos deslocamentos do sujeito ou de um objeto, conforme Marçal e Tassinari (2013).

Sejam os pontos do espaço representados pelas letras latinas maiúsculas A, B, C etc. Como vimos, um sujeito

---

5 Piaget utiliza a notação x; y (z) para indicar as idades dos sujeitos observados em dada situação experimental. As letras x, y, z indicam, respectivamente, a idade, o mês e o dia do sujeito quando este foi submetido ao experimento. Por exemplo, 0; 11 (22) indica que Laurent tem 0 ano, 11 meses e 22 dias de idade.

6 Tal explicitação está de acordo com as descrições que Piaget e colaboradores realizam em sua obra. Cf. *A construção do real na criança* (1970); *A Epistemologia Genética* (1978); *A psicologia da criança* (2002); e *O nascimento da inteligência na criança* (2008).

ou objeto que parte do ponto A e chega até o ponto B (ou de B até C) realizou um deslocamento AB (ou BC), que será representado aqui pela notação vetorial $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ etc. Do ponto de vista psicológico, o vetor representa justamente a ação de deslocamento realizada pelo sujeito, ou o deslocamento do objeto do ponto A ao ponto B no espaço, cuja noção o sujeito constrói. Por exemplo, na citação anterior, temos os deslocamentos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$ etc. do relógio, ao ser escondido nas almofadas e ser levado a um ponto C distante das almofadas A e B.

Considerando então o sistema de esquemas de ações, temos que a estrutura de tais deslocamentos se complexifica, como mostra Piaget em todo o segundo capítulo do seu livro *A construção do real na criança* (1970).

Vamos supor, agora, que o sujeito consiga coordenar dois deslocamentos contíguos, por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. Do ponto de vista psicológico, isso quer dizer que ele pode partir (ou deslocar um objeto) do ponto A até o ponto B, e novamente partir do ponto B até um ponto C, entendendo que, com isso, realiza um deslocamento final $\overrightarrow{AC}$. Denotaremos por * (asterisco) a composição de dois deslocamentos. No exemplo anterior, usamos $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ para expressar uma coordenação dos deslocamentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, resultando no deslocamento $\overrightarrow{AC}$.

Assim definidas as representações dos deslocamentos e sua coordenação ou composição, vamos analisar o que vem a ser a estrutura epistêmico-psicológica grupo prático de deslocamentos e mostrar em que sentido ela tem a forma de uma estrutura abstrata de grupo matemático, conforme a Definição 1.9.

O grupo prático de deslocamentos

Conforme Marçal e Tassinari (2013, p.15), se representarmos os deslocamentos e suas composições como

feito anteriormente, teremos então que o grupo prático de deslocamentos apresenta as seguintes propriedades:

1. Deslocamento nulo, representado, por exemplo, por $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$ etc.
2. Deslocamento inverso ou a conduta do retorno, no qual, para todo deslocamento, por exemplo, $\overrightarrow{AB}$, existe o seu inverso $\overrightarrow{BA}$.
3. A conduta do desvio, representada, por exemplo, por $\overrightarrow{AB} * (\overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC}) * \overrightarrow{CD}$ $= \overrightarrow{AC} * \overrightarrow{CD}$.

Vamos analisar cada uma dessas propriedades a partir dos conceitos introduzidos por Piaget e Inhelder (em especial, 1970; 1978; 2002; 2008) e inspirados no artigo "O modelo 'grupo prático de deslocamentos' em Psicologia e Epistemologia Genética e sua formalização" (Marçal; Tassinari, 2013, p.6-18).

Existência de deslocamentos nulos

Vamos supor a composição de um deslocamento qualquer $\overrightarrow{AB}$ com seu inverso $\overrightarrow{BA}$. Neste caso, temos $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BA}$ $= \overrightarrow{AA}$. Esta equação expressa que o sujeito coordena dois deslocamentos de tal forma a realizar um deslocamento que parte do ponto A e retorna ao ponto A, representado por $\overrightarrow{AA}$. Logo, todo deslocamento do tipo $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$ representa o deslocamento nulo, ou o vetor nulo.

É possível explorar o significado algébrico do deslocamento nulo, quando representado em um sistema formal. Por exemplo, tomemos o deslocamento $\overrightarrow{AA}$, resultado da composição de dois deslocamentos contíguos (adjacentes) e inversos, o que é representado pela equação $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB}$ $* \overrightarrow{BA}$ [1]. Seja agora outro deslocamento qualquer cujo ponto de partida ainda seja A, por exemplo, $\overrightarrow{AC}$ [2]. Fazendo a composição de [1] com [2], temos: $(\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BA}) *$

$\overrightarrow{AC}$ [3]. Da equação [1] e também por [3] temos que: $(\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BA}) * \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA} * \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$. Logo, podemos concluir que, ao compor o vetor nulo $\overrightarrow{AA}$ com um vetor contíguo $\overrightarrow{AC}$, o resultado é o próprio vetor $\overrightarrow{AC}$.

Conduta do retorno

Para todo deslocamento $\overrightarrow{AB}$ existe um único deslocamento inverso $\overrightarrow{BA}$.

A conduta do retorno é um tipo particular de coordenação de deslocamentos realizada pelo sujeito, como observado por Piaget, em que, em sua prática, a criança sabe que pode voltar ao ponto de partida, daí o nome "retorno". Ela consegue compor o deslocamento realizado inicialmente com o deslocamento inverso, voltando ao ponto de onde partiu, "anulando" seu deslocamento ou o de um objeto qualquer.

Se representamos o deslocamento inicial por $\overrightarrow{AB}$, temos que seu deslocamento inverso é $\overrightarrow{BA}$. Logo, segundo Piaget, se a criança é capaz da conduta do retorno, então, para todo deslocamento, ela sabe realizar um deslocamento inverso a ele.

Conduta do desvio

O sujeito pode coordenar seus deslocamentos de forma mais complexa. Por exemplo, consideremos três deslocamentos: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$. Como podemos verificar, as composições dos três resultam em $\overrightarrow{AD}$, ou seja, $(\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC}) * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

No entanto, consideremos a seguinte observação:

> Aos 1; 6 (8), Jacqueline joga uma bola sob um sofá. Mas, em vez de se abaixar, imediatamente, e de procu-

> rá-la no chão, ela olha o local, compreende que a bola atravessou o espaço situado sob o sofá e se coloca em marcha para ir atrás desse. Entretanto, há uma mesa à sua direita e o sofá está encostado em uma cama à sua esquerda, ela começa por virar as costas ao local onde a bola desapareceu, em seguida ela contorna a mesa e, por fim, chega atrás do sofá, diretamente no lugar certo. Ela, portanto, contornou o círculo por um itinerário diferente daquele do objetivo e elaborou, assim, um "grupo" por representação do deslocamento invisível da bola e do "desvio" a cumprir para reencontrá-la. (Piaget, 1970, p.190)

Tal situação evidencia que houve a necessidade de um desvio no deslocamento de Jaqueline para ela pegar novamente a bola, devido a um conjunto de objetos que obstruiu o caminho direto à bola. Nesse caso, para alcançar a bola, foi preciso que ela coordenasse seus deslocamentos frente à impossibilidade de se deslocar diretamente até seu objetivo. Quando o sujeito é capaz de desviar de obstáculos por meio de deslocamentos equivalentes àquele que o levaria diretamente ao seu objetivo, como na citação anterior, diz-se que ele é capaz da conduta do desvio.

Consideremos dois pares de vetores: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CD}$. Compondo os dois primeiros, temos que: $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. Compondo os dois últimos, temos que: $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$. Logo, verificamos uma equivalência entre a primeira e a segunda composição: nos dois casos, o sujeito realiza um deslocamento que parte do ponto inicial A e chega ao ponto D, no primeiro caso passando por B e no segundo, por C. Ou seja, podemos representar a conduta do desvio pela equação $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} * \overrightarrow{CD}$. Essa coordenação expressa exatamente a propriedade da associatividade da operação * : $\overrightarrow{AB} * (\overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC}) * \overrightarrow{CD}$.

Segundo Piaget, a criança está de posse do grupo prático de deslocamentos, pelo qual ela constrói a noção de espaço, na medida em que coordena suas ações de deslocamentos em uma estrutura epistêmico-psicológica que apresenta as seguintes características: (**i**) o deslocamento enquanto ação coordenada; (**ii**) a composição de dois deslocamentos; (**iii**) a conduta do retorno; (**iv**) o deslocamento nulo; (**v**) a conduta do desvio. Ou seja, o significado psicológico do grupo prático de deslocamentos é:

> [...] a) um deslocamento *AB* e um deslocamento *BC* podem coordenar-se num único deslocamento *AC*, que ainda faz parte do sistema; b) todo deslocamento *AB* pode inverter-se em *BA*, donde a conduta do "retorno" ao ponto de partida; c) a composição do deslocamento *AB* e do seu inverso *BA* dá o deslocamento nulo *AA*; d) os deslocamentos são associativos, o que quer dizer que, na sequência *ABCD*, temos $AB + BD = AC + CD$: isto significa que um mesmo ponto *D* pode ser atingido a partir de *A* por caminhos diferentes [...] o que constitui a conduta do "desvio". (Piaget, 2002, p.22)

Assim, a estrutura epistêmico-psicológica grupo prático de deslocamento nos permite fazer uma correlação direta com a estrutura matemática abstrata de grupo, discutida anteriormente (Definição 1.9), o que nos leva à próxima seção.

As formas matemáticas no período sensório-motor

A explicitação da estrutura epistêmico-psicológica grupo prático de deslocamento na parte anterior nos conduz a uma pergunta fundamental neste momento: Exis-

te uma forma matemática já no período sensório-motor, entendendo-se por forma matemática as estruturas matemáticas abstratas, já definidas neste livro? Isto é, o sujeito, no período sensório-motor, já possui uma estruturação que comporte uma forma matemática e que é fundamental, inclusive, para as construções ulteriores, ainda que tal forma seja inconsciente para ele? Nesta parte, tentaremos responder a essas questões, estabelecendo uma relação entre o grupo prático de deslocamento e o grupo matemático.

Lembremos então que, do ponto de vista deste livro, a estrutura abstrata de grupo é a forma matemática de todas as estruturas matemáticas que satisfazem os axiomas de grupo.

Passemos então à discussão de tais formas no período sensório-motor.

Seja G um conjunto não vazio e * uma operação binária em G. Pela Definição 1.9, $(G, *)$ é um grupo se as seguintes condições são satisfeitas:

G1) Existe e em G tal que, para todo a em G, $a * e = e * a = a$ (elemento neutro).

G2) Para todo a em G, existe b em G, tal que $a * b = b * a = e$ (elemento inverso).

G3) Para qualquer a, b, c em G, $a * (b * c) = (a * b) * c$ (associatividade).

Consideremos então G como sendo o conjunto de deslocamentos realizados pelo sujeito epistêmico e * a operação composição de deslocamentos vetoriais. Temos então que a estrutura $(G, *)$ apresenta uma estrutura de grupo, pois satisfaz os axiomas da estrutura abstrata de grupo, quando constituída pelo sujeito. De fato:

G1) Deslocamento nulo e elemento neutro: existe $\overrightarrow{O} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ $(= \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD} = \ldots)$ em G, tal que, para todo $\overrightarrow{AB}$ em G, $\overrightarrow{AA} * \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.

G2) Conduta de retorno e elemento inverso: temos que, para todo $\overrightarrow{AB}$ em G, existe $\overrightarrow{BA}$ em G, tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BA} * \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB}$.

G3) Conduta do desvio e associatividade: para qualquer $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ em G, $\overrightarrow{AB} * (\overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC}) * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} * \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Nesse caso, verificamos que as propriedades dos deslocamentos realizados pelo sujeito no espaço satisfazem os axiomas da estrutura abstrata de grupo, caracterizando a forma matemática da estrutura epistêmico-psicológica grupo prático de deslocamentos como um grupo matemático.

Podemos assim responder a parte de nossa questão epistemológica, que é entender como o sujeito compreende as estruturas lógico-matemáticas abstratas. Nossa hipótese, diante dos dados precedentes, é que, na medida em que o sujeito epistêmico constitui seu sistema de esquemas de ação, já existe, em sua estruturação, uma forma matemática no sentido aqui definido. Entretanto, tal forma ainda é inconsciente para o sujeito, e um longo caminho terá que ser percorrido até que haja a possibilidade de tomada de consciência das formas matemáticas.

3
As estruturas epistêmico-psicológicas no período operatório concreto e suas formas

> [...] *todo sistema de operações intelectuais apresenta-se psicologicamente sob dois aspectos paralelos: exteriormente trata-se de ações coordenadas entre si (ações efetivas ou mentalizadas) e interiormente, isto é, para a consciência, trata-se de relações que se implicam umas às outras.*
>
> (Piaget, 1976, p.13)

Neste capítulo, inspirados nos trabalhos de Tassinari (em especial 1998 e 2011), explicitaremos uma estrutura matemática – a estrutura de digrafos-RPT – associada a uma estrutura epistêmico-psicológica – o sistema de esquemas de transfigurações – e mostraremos como aquela pode ser vista como uma estrutura matemática específica. Para tal, apresentaremos a definição de operação em Piaget (1957, p.45) e algumas características do pensamento operatório concreto (agrupamento); estabeleceremos uma relação entre o sistema de esquemas de transfiguração e as operações concretas, mostrando, através de um exemplo, como essas resultam da coordenação daqueles esquemas;

mostraremos as relações entre o sistema de esquemas de transfigurações e a estrutura de digrafos-RPT; por fim, proporemos designar as transfigurações e seus esquemas de operações sobre símbolos e mostraremos que as operações parciais podem ser consideradas formas matemáticas dessas operações sobre símbolos.

A definição de operação em Piaget e a operação concreta parte–todo

Como vimos no capítulo precedente, o sujeito característico do período sensório-motor constrói a estrutura mental (ou, na nossa denominação, a estrutura epistêmico-psicológica) a partir da organização do real por meio de ações localizadas no espaço e no tempo. As conexões entre os fatos estabelecidos pela inteligência sensório-motora são assim limitadas pelos dados atuais da percepção e dos movimentos. Por isso, tais conexões só ligam as percepções e os movimentos de forma sucessiva, sem conectar todos os dados em um conjunto que domine cada estado em particular, distintos no tempo e no espaço, e que os reflita em um quadro total e simultâneo, caracterizando a representação.

No entanto, posteriormente, na construção das estruturas necessárias ao conhecimento, o sujeito se torna capaz de "[...] um conjunto de condutas que supõe a evocação representativa de um objeto ou de um acontecimento ausente" e que "[...] envolve, por conseguinte, a construção ou o emprego de significantes diferenciados" (Piaget; Inhelder, 2002, p.48). Tais condutas representativas resultam da complexificação do sistema de esquemas de ações, dando possibilidade ao sujeito de representar os elementos com os quais interage.

Essa capacidade de evocar objetos ou acontecimentos distantes no tempo e no espaço através de significantes é chamada de função semiótica. Segundo Piaget:

> Consiste em poder representar alguma coisa (um "significado" qualquer: objeto, acontecimento, esquema conceitual etc.) por meio de um "significante" diferenciado e que só serve para essa representação: linguagem, imagem mental, gesto simbólico etc. (Piaget; Inhelder, 2002, p.47)

Temos então que, por definição, a capacidade de representação do sujeito epistêmico envolve necessariamente a utilização de um significante atrelado ao significado que evoca. Assim, a função semiótica permite um novo patamar no desenvolvimento e, por isso, marca o surgimento de uma forma totalmente nova de inteligência.

Portanto, ao tratarmos a questão da significação representativa – incluindo, por definição, a noção de significante e de significado –, devemos distinguir dois tipos de significantes: o signo e o símbolo.[1]

Um signo é um significante arbitrário em relação ao significado que evoca: uma palavra, uma letra, qualquer sequência finita de símbolos de dado alfabeto etc., e é arbitrário porque não guarda semelhança com seu significado e, por isso, constitui uma evocação admitida por convenção social. Piaget (2008) considera que "o signo é um símbolo coletivo e por isso mesmo 'arbitrário'. O seu aparecimento ocorre, igualmente, durante o segundo

1 Existe ainda outro significante considerado por Piaget: o indício. Sendo um significante concreto e que não está vinculado à representação, mas à percepção direta, não trataremos dele neste livro. De maneira geral, Piaget (2008) chama de indício "toda e qualquer impressão sensorial ou qualidade diretamente percebida cuja significação é [...] um objeto ou esquema sensório-motor" (p.185).

ano, com o início da linguagem e, sem dúvida, em sincronismo com a constituição do símbolo [...]" (p.185).

O símbolo, por sua vez, é

> uma imagem evocada mentalmente ou um objeto simbólico materialmente escolhido intencionalmente para designar uma classe de ações ou objetos. Assim, a imagem mental de uma árvore simboliza na mente as árvores em geral, uma determinada árvore de que o indivíduo se recorda ou certa ação relativa às árvores etc. (Piaget, 2008, p.185)

Nesse contexto, Tassinari (2011) explica que a imagem mental é "[...] o significante semelhante ao significado, usado pelo sujeito epistêmico para representar, e, portanto, é um símbolo" (p.34). Além disso, atentando às ações interiorizadas e enfatizando o papel da imagem mental na constituição de sistemas ulteriores – em particular no período operatório concreto –, o autor continua: "mas [o símbolo] não é um objeto do meio exterior [...] e sim é interno ao sujeito epistêmico" (p.34). Assim:

> As imagens mentais são "cópias" do real; entre aspas, pois elas não derivam dos objetos ou dos acontecimentos "em si", mas do real tal qual está construído pelo sujeito num determinado momento segundo suas ações. A imagem mental, como mostra Piaget (1978),[2] é o produto da interiorização dos atos de inteligência, imitação interiorizada, ou ainda, o esboço de uma imitação possível (e portanto tem suas raízes no plano sensório-motor). (Tassinari, 2011, p.34)

2 *A formação do símbolo na criança:* imagem, jogo e sonho: imagem e representação (1978). Neste livro, utilizamos a edição de 1990 do livro de Piaget.

Do exposto na citação, podemos dizer que há uma significação inerente aos esquemas de ações do sujeito epistêmico enquanto ele constrói o seu real por meio da assimilação dos dados, quando estes são incorporados ao seu sistema de esquemas de ações. Tal "significação", por meio da ação, é a raiz para significações inerentes aos sistemas mais complexos (incluindo as estruturas matemáticas abstratas), que necessitam da função semiótica, de imagens mentais e de ações internas.

Com efeito, a função semiótica consiste na representação de um significado qualquer por meio de um significante diferenciado (símbolo ou signo) e que serve somente para essa representação. Assim, podemos representar um objeto, um acontecimento, um esquema de conceito por meio de uma linguagem, de uma imagem mental, de um gesto simbólico etc. (Piaget; Inhelder, 2002, p.46).

É nessa linhagem que Ramozzi-Chiarottino (1972) trata também de apresentar e definir os tipos de significantes, já que a função semiótica "é mais ampla que a linguagem, por incluir, além dos signos verbais [...], os símbolos [...] no sentido estrito", e diferencia os significantes, de forma que "o signo [...] é geral e abstrato (arbitrário), o símbolo [...] é individual e social, de uma mesma elaboração de significações" (p.16).

Em concordância, Piaget (2008) afirma que "símbolo e signo apenas são os dois polos, individual e social, de uma mesma elaboração de significações" (p.185).

Com o aparecimento da função simbólica, estabelecem-se novas relações entre o sujeito e seu meio, enriquecendo seu pensamento, segundo Ramozzi-Chiarottino (1972), especialmente pela aquisição da linguagem, porém, uma vez de posse da linguagem,

> a criança não chega imediatamente às *operações* implícitas em suas estruturas. É necessária uma atividade que vai

> de dois a sete anos para que a criança chegue às operações concretas (que dizem respeito aos objetos) e depois é preciso esperar os dez ou onze anos [...] para que ela alcance as operações proposicionais.[3] (p.17, grifo nosso)

Como veremos, as operações concretas aparecem, segundo Piaget, nas transformações do real, por ações interiorizadas e coordenadas em sistemas coerentes e reversíveis.

Por definição, as operações, para ele, são "[...] ações interiorizadas ou interiorizáveis, reversíveis [isto é, podem ser executadas nos dois sentidos] e coordenadas em estruturas totais"[4] (Apostel; Mandelbrot; Piaget, 1957), sendo que uma ação interiorizada é

> [...] uma ação executada em pensamento sobre objetos simbólicos, seja pela representação de seu desenrolar possível e sua aplicação aos objetos reais evocados por imagem mental [...], seja pela aplicação direta aos sistemas simbólicos (signos verbais etc.). (p.44-5)

São objetos simbólicos os objetos não materiais, tais como as imagens mentais, os sistemas de signos ou sím-

---

3 Esse nível – da "passagem" da ação à operação – não é apenas uma transição, uma vez que "se progride seguramente em relação à ação imediata, que a função semiótica permite interiorizar, é também assinalado, sem dúvida, por obstáculos sérios e novos" (Piaget, 2002, p.86).

4 Como será discutido neste capítulo, notemos inicialmente que, assim como as ações, o sistema das operações também consiste em estruturas epistêmico-psicológicas. Nesse sentido, as operações concretas constituem a estrutura de agrupamento (composto por estruturas de classificação e seriação, constituídas, respectivamente, por operações de classes e operações de relações). As operações concretas são assim executadas por meio de operações sobre símbolos (os quais representam objetos concretos) ou, ainda, por esquemas de transfigurações, conforme discutiremos posteriormente.

bolos etc. Piaget considera que "[...] psicologicamente a operação é uma ação interiorizada que se faz reversível por sua coordenação com outras ações interiorizadas numa estrutura de conjunto que engloba certas leis de totalidade" (Piaget; Beth; Mays, 1974, p.43).

As características da operação, de ser uma ação interiorizada, reversível e coordenada numa estrutura total, no sentido expresso por Ramozzi-Chiarottino (1972), pelo qual uma "operação [...] nunca aparece só [mas] sempre ocorre em função de um conjunto de operações coordenadas entre si" (p.20), são necessárias para caracterizar a maneira como o sujeito operatório concreto age no mundo. Segundo Piaget (1980): "[...] as operações só se constituem ao coordenarem-se entre si sob a forma de estruturas de conjunto" (p.328), resultando no fechamento de tais estruturas (de caráter autorregulatório), cujas características operatórias se implicam reciprocamente, de acordo com uma composição necessária para esse fechamento estrutural.

As operações evidentemente marcam uma nova estruturação do real e uma nova e rica forma de inteligência expressa pelo sujeito em meio aos problemas que lhe são apresentados. Anteriormente, os seus raciocínios não passavam de "experiências mentais", apenas prolongando as coordenações sensório-motoras no campo da representação. Tais raciocínios continuavam, durante muito tempo, como intermediários entre o pensamento simbólico inicial e o período das operações concretas, que, por sua vez, caracterizam de fato o pensamento lógico (ainda que ligado a objetos "reais"). Esse intermédio é consequência do caráter pré-operatório do raciocínio transdutivo, o qual leva ora a respostas corretas, ora a respostas incorretas.

> A transdução é um raciocínio sem imbricações reversíveis de classes hierárquicas, nem de relações. Sendo

> sistemas de coordenações sem imbricações, [...] a transdução será, pois, uma espécie de experiência mental que prolonga a coordenação de esquemas sensório-motores no plano das representações; como não constituem conceitos gerais, e sim meros esquemas de ações evocados mentalmente, essas representações ficaram a meio-caminho entre o símbolo-imagem e o próprio conceito [isto é, entre o pensamento operatório]. (Piaget, 1990, p.300)

Conclui-se facilmente por que tal raciocínio transdutivo leva ora a conclusões corretas, ora a conclusões incorretas, que não estão sustentadas pelas premissas: devido à falta de dedução operatória. Quando o raciocínio não pressupõe a inclusão classificatória e intencional, fazendo uso apenas das coordenações de esquemas sensório-motores, bem como quando se aplica somente a objetos individuais, a transdução é correta. Ela também é correta quando o raciocínio deve se aplicar, por meio de experiências mentais, apenas aos esquemas já generalizados ou às suas composições. No entanto, se as inclusões de classes ou composições associativas de relações se fazem necessárias, então a transdução falha pela falta de um pensamento coordenado e reversível, isto é, pela falta justamente de um pensamento operatório.

O que falta então à inteligência transdutiva em relação à inteligência lógico-operatória? Segundo Piaget, há entre a inteligência sensório-motora e a inteligência lógica quatro diferenças fundamentais:

1. No período sensório-motor há ausência de representação, isto é, de condutas que supõem a evocação, por parte do sujeito, de significantes diferenciados de seus significados. Como vimos no capítulo anterior, as conexões entre os fatos estabelecidos pela inteligência sensório-motora estão limitadas

pelos dados atuais da percepção e dos movimentos. Por isso, tais conexões só ligam as percepções e os movimentos de forma sucessiva, sem reunir todos os dados numa estrutura que organize os estados em particular, distintos no tempo, e que os reflita em um quadro total e simultâneo, caracterizando a representação. Segundo Piaget (1990), ainda, "a inteligência sensório-motora funciona, assim, como um filme em câmera lenta, que representasse uma imagem imóvel após outra, sem levar à fusão de imagens" (p.304).

2. No período sensório-motor não há pensamento reflexivo, mas uma inteligência prática, pela falta de uma capacidade de representação e da equilibração do pensamento operatório. Nesse contexto, a inteligência sensório-motora tende ao êxito, e não à verdade; satisfaz-se com a chegada ao objetivo prático a que se visa, e não com a constatação (classificação ou seriação) ou com a explicação. É inteligência puramente vivida, e não pensamento.
3. A inteligência sensório-motora trabalha somente na realidade atual, uma vez que seu domínio é sempre limitado pelos instrumentos e indícios perceptivos e motores (sem a possibilidade de utilização de símbolos ou signos) e esquemas que se referem às ações.
4. O pensamento, nesse período, é essencialmente individual, em oposição aos enriquecimentos sociais adquiridos com o emprego dos signos.

Como afirma Piaget, não podemos nos esquecer de admitir a continuidade funcional que está presente em todos os sujeitos e em todos os períodos do desenvolvimento, tampouco podemos esquecer as diferenças estruturais que marcam os estágios do desenvolvimento e suas es-

pecificidades.[5] Admitindo, portanto, esses dois aspectos gerais, parece que somente quatro condições bastam para que a inteligência passe da coordenação de esquemas de ações, limitados pela percepção, para a inteligência lógica e conceitual:

> 1) uma aceleração geral dos movimentos, fundindo-se as ações sucessivas numa abreviação ou encurtamento móvel da ação de conjunto; o desenrolar rápido do filme da conduta constituiria, assim, a representação interior,

5 Notemos que o presente livro busca explicitar, segundo a Epistemologia Genética, como o conhecimento matemático abstrato é possível, a partir de uma análise exclusivamente estrutural, reservando para trabalhos futuros uma análise do ponto de vista funcional. Em relação a essa distinção, ressaltaremos apenas que, segundo Tassinari, Ferraz e Pessoa (2014): "O estudo da relação entre biologia e conhecimento em Piaget (2008a) nos leva a considerar, inicialmente, certos fatores hereditários que condicionariam o desenvolvimento intelectual, porém, como nos diz Piaget (2008a, p.13-4), tal implicação pode ser entendida sob dois sentidos biologicamente diferentes: os fatores hereditários estruturais e os funcionais. Os fatores hereditários de ordem estrutural vinculam-se à constituição do sistema nervoso e órgãos sensoriais. Essa constituição estrutural, ainda que seja limitada, influi na construção das noções mais fundamentais, tais como na nossa noção de espaço, tempo, causalidade e permanência dos objetos no espaço, por exemplo" (cf. Piaget, 2008b). Os autores continuam: "A atividade hereditária de ordem funcional tem outro sentido distinto. Trata-se da hereditariedade do próprio funcionamento e não da transmissão desta ou daquela estrutura. Nesse sentido, a atividade funcional da razão ou inteligência não proviria da experiência, mas estaria ligada à 'hereditariedade geral' da própria organização vital", pois, para Piaget (2008a), "[...] assim como o organismo não poderia adaptar-se às variações ambientais se não estivesse já organizado, também a inteligência não poderia aprender qualquer dado exterior sem certas funções de coerência (cujo termo último é o princípio da não contradição), de relacionamentos etc., que são comuns a toda e qualquer organização intelectual" (p.14).

> concebida como bosquejo ou esquema antecipador do ato. 2) uma tomada de consciência que esclarece esse esboço abreviado, isto é, que desenrola o filme nos dois sentidos: a constatação e a explicação, fundadas na classificação hierárquica e na seriação das relações, substituiriam, pois, a simples busca do objetivo prático. 3) um sistema de signos, que se acresce às ações, permitiria a construção dos conceitos gerais necessários a essas classificações e seriações. 4) a socialização que acompanha o emprego dos signos inseriria o pensamento individual em uma realidade objetiva e comum. (Piaget, 1990, p.305)

Ainda segundo Piaget (1976), "[...] todo sistema de operações intelectuais apresenta-se psicologicamente sob dois aspectos paralelos: exteriormente, trata-se de ações coordenadas entre si (ações efetivas ou mentalizadas)" (p.13), e, "interiormente, quer dizer, para a consciência, trata-se de relações que se implicam umas às outras". Portanto, "[...] o próprio das operações é constituir sistemas".

Um exemplo típico de operação concreta é a operação de classificação, relativa à inclusão parte–todo. Para introduzirmos tal operação, consideremos inicialmente a seguinte situação:

> Seja [...] uma caixa contendo somente "contas de madeira" (= classe B), das quais a maioria é castanha ("contas castanhas" = classe A), mas duas são brancas ("contas brancas" = classe A'); a questão que então se coloca é saber se nessa caixa há mais contas de madeira B ou contas castanhas A. (Piaget; Szeminska, 1975, p.225)

Temos três respostas possíveis para essa pergunta, que correspondem às três etapas que Piaget distingue a partir dessas respostas. A situação a seguir exemplifica a primeira fase:

> Stro (6 anos): "Existem nesta caixa mais contas de madeira ou mais contas castanhas? – Mais contas castanhas. – Por quê? – Porque das de madeiras só há duas. – Mas as castanhas não são também de madeira? – Ah, sim. – Então, há mais castanhas ou mais de madeira? – Mais castanhas. (Piaget; Szeminska, 1975, p.227)

Segundo Piaget, durante a primeira fase, a criança permanece incapaz de apreender que as classes *B* abrangerão sempre mais elementos que as classes *A*. Do ponto de vista psicológico, ela não consegue pensar simultaneamente no todo *B* e nas partes *A* e *A'*.

A fase seguinte pode ser exemplificada por esta situação:

> Gail (6;0), F.: "Se fizeres um colar com as contas castanhas que se acham nesta caixa ou com as contas de madeira que estão ali, qual seria o mais comprido? – *O maior será o colar de contas castanhas*. – E há mais contas de madeira ou mais contas castanhas? – *Mais contas castanhas. Não, mais contas de madeira. Não, é a mesma coisa!*" Vê-se que Gail quase chega a incluir uma classe na outra: o que lhe falta somente é compreender que a classe das de madeira possui dois termos a mais que a classe castanha. (Piaget; Szeminska, 1975, p.241)

A situação apresentada é um caso particular que caracteriza a fase da descoberta intuitiva – e não dedutiva – da resposta certa, o que significa que há tateios antes da construção correta, e não composição imediata.

A última situação é a consideração de um pensamento operatório, quando o sujeito adquire a capacidade de composição aditiva das classes a partir da dedução correta, pela qual seu pensamento leva em conta, simultaneamente, o todo *B* e as partes *A* e *A'*. Piaget afirma:

> Em resumo, assim que a criança raciocina sobre uma das partes considerada por si mesma, a totalidade como tal se dissolve, transferindo suas qualidades para a outra parte somente. Se chamarmos de B o todo, de A a parte considerada e de A' a outra parte, constatamos pois que a dificuldade das crianças [da] primeira fase em compreender a relação de inclusão ou de parte da totalidade é na realidade uma dificuldade em conceber o todo como resultante de uma composição aditiva das partes: $B = A + A'$ e $A = B - A'$. (Piaget; Szeminska, 1975, p.236)

Por fim, de acordo com as situações descritas anteriormente, podemos apresentar a primeira operação de agrupamento relativa às classes considerada por Piaget (1976, p.101): a adição simples ou o agrupamento aditivo das classes.

Consideremos uma série de classes $A \subset B \subset C$ ..., primárias, nas quais cada uma está contida na seguinte. Considerando ainda que as classes não são equivalentes entre si, mas ordenadas simplesmente da forma mostrada, podemos fazer corresponder a cada uma a sua complementar: $A' = B - A$; $B' = C - B$. Tais classes complementares são consideradas secundárias.

A partir de tal ponto de vista, Piaget (1976) afirma:

> A classe A e as classes secundárias $A', B', C', \ldots$ serão chamadas, juntas, as "classes elementares" do sistema. O agrupamento aditivo é então constituído pela sequência de encaixes dicotômicos: [...] $A + A' = B$; $B + B' = C$; $C + C' = D$ etc. [...] (p.101)

Do ponto de vista formal, temos que o agrupamento aditivo é o primeiro tipo de estrutura de classificação apresentado por Piaget no seu *Ensaio* (1976).

Na próxima parte, apresentaremos uma nova estrutura epistêmico-psicológica que está relacionada com a noção de operação (concreta) em Piaget.

O sistema de esquemas de transfigurações e as operações concretas

Nesta parte, de início apresentaremos o conceito de transfiguração e uma nova estrutura epistêmico-psicológica, o sistema de esquemas de transfigurações, que explicita como se dá a passagem na qual a criança age sobre a experiência sensível até a estruturação lógico-matemática do real. Em seguida, relacionaremos tal estrutura epistêmico-psicológica com as operações concretas.

Da ação sobre a experiência sensível à estruturação lógico-matemática do real: a definição de transfiguração

Como vimos, o conceito de operação em Piaget está ligado à ideia de ação interiorizada, a qual, por sua vez, é uma ação executada em pensamento sobre objetos simbólicos. Dessa forma, pressupõe a representação[6] de tais objetos, uma vez que é através dessa representação que o sujeito pode executar o pensamento.

Buscando uma gênese para as estruturas lógico-operatórias, em contraposição às estruturas puramente formais (mais "gerais"), escreve Piaget (1976):

> Se nos interessarmos apenas pelas estruturas "gerais", [o] modo de composição [do agrupamento] não apresenta

6 Lembremos que o termo "representação", no contexto da Epistemologia Genética, está intrinsecamente relacionado à capacidade que Piaget denomina "função semiótica", conforme foi discutido anteriormente.

> valor algum e a tendência compreensiva de qualquer axiomático será a de eliminar [as] restrições para chegar seja a um grupo, seja a uma rede completa, o que é bastante fácil. Por outro lado, se procuramos o "*elementar*" com a finalidade de encontrar as conexões entre as operações "naturais" e as estruturas formalizáveis, é dever do analista estabelecer até onde pode levar a tais composições. A ideia central é a de que a formalização não é um estado, mas um processo, e que ela se apoia, consequentemente, em estruturas que se elaboram segundo níveis. Procurando atingir, então, as mais *elementares* dentre elas, mas na medida naturalmente em que elas já permitem um jogo de composições necessárias ou de inferências válidas, *nós as encontramos nas operações de classificação e de relacionamento, representando o estágio mais simples da lógica das classes e das relações*. (p.XVII, grifos nossos)

É nesse sentido que Piaget chama a estrutura de agrupamento de estrutura (lógico-operatória) elementar. Além disso, a relação entre as operações do pensamento natural e as estruturas lógico-operatórias seria análoga àquela existente entre as operações matemáticas e as estruturas matemáticas (ou, ainda, entre as ações e a estruturação sensório-motora): na medida em que uma estrutura matemática (específica) é definida como um conjunto no qual são estabelecidas certas relações entre seus elementos constituintes (operações matemáticas, por exemplo), podemos considerar que a estrutura epistêmico-psicológica de agrupamento se estrutura a partir de um conjunto de operações concretas (classificações e seriações) sobre objetos concretos. Lembremos ainda que, como salientado, Piaget (1976) afirma que "[...] todo sistema de operações intelectuais apresenta-se psicologicamente sob dois aspectos paralelos: exteriormente trata-se de ações coordenadas entre si (ações efetivas ou mentalizadas)" e, "interiormen-

te, quer dizer, para a consciência, trata-se de relações que se implicam umas às outras". Portanto, que "[...] o *próprio das operações é constituir sistemas*" (p.13, grifos nossos).

Assim, dizemos que, ao realizar operações "do pensamento natural", o sujeito constitui as estruturas epistêmico-psicológicas, e é nesse sentido que as operações concretas formam a estrutura de agrupamento. É nesse sentido também que estabelecemos as relações de operações do pensamento natural e as estruturas epistêmico-psicológicas.

Ao exemplificar a noção de operações no seu *Ensaio de lógica operatória* (1976), Piaget apresenta a estrutura de agrupamento, "uma estrutura intermediária entre o grupo e a rede e, como tal, exprime a natureza própria às totalidades lógicas, [bem como] ao conjunto das operações que intervém numa classificação" (p.90).[7] Assim, em relação ao período que concerne às estruturas operatórias concretas (lógico-operatórias), Piaget concebe o agrupamento como uma estrutura inerente às estruturas de classes e relações, analisando como essas se constituem e procurando entender as relações entre tais estruturas, que por vezes ele chama de elementares, e as operações do pensamento natural.

Tais exemplos referem-se à capacidade de seriação e classificação (incluindo nesta a união, a interseção e a di-

7 Na Introdução à segunda edição do *Ensaio* (1976, p.XIX), Piaget estabelece uma relação entre o grupo, o agrupamento e a rede. Segundo ele: "Do grupo, o agrupamento já possui uma reversibilidade total, assim com a operação idêntica geral e única, mas, como suas operações implicam também tautificações, a associatividade é apenas parcial. Em comparação à rede, e deixada de lado esta reversibilidade, que é mais forte do que as complementaridades próprias às redes complementadas, pode-se considerar o agrupamento como uma semirrede, pela razão essencial dela considerar à parte as operações aditivas [...] ou multiplicativas [...], donde a ausência [entre outras coisas] de um 'conjunto das partes' e uma composição por simples encaixes sucessivos".

ferença de conjuntos) do sujeito epistêmico. Assim, no seu *Ensaio*, Piaget expõe, sistematicamente, quatro estruturas de agrupamento relativas às classes – dentre elas: adição simples (ou inclusiva), que nada mais é do que a conhecida união de classes, conforme exemplificamos na seção anterior; complemento de classes; multiplicação simples, a intersecção; multiplicação counívoca e biunívoca das classes – e quatro relativas às relações – a adição das relações assimétricas transitivas, as relações simétricas e as relações assimétricas de um a muitos e de muitos a um.

Temos então que o agrupamento seria o modelo das estruturas operatórias concretas, pois, segundo Piaget e Beth (1961): "a observação e a experiência nos têm mostrado [...] que, se chamamos 'operações' às ações interiorizadas, reversíveis [...] e coordenadas em estruturas de conjunto" (p.185) e, ainda, "se chamamos de concretas as operações que intervêm nas manipulações dos objetos ou nas suas representações acompanhadas de linguagem", então podemos dizer que "todas as estruturas do nível das operações concretas se reduzem a um só modelo", que Piaget designa com o nome de agrupamento.

Lembremos então que, como vimos no Capítulo 2, a concepção estrutural presente no pensamento de Piaget, bem como a noção de que o conhecimento é construído pelo sujeito por meio de sua interação com o objeto, nos fornecem ferramentas relevantes para uma possível formalização e solução do problema proposto sobre a análise do conhecimento científico por meio de uma exploração lógico-matemática. Sobre isso, Piaget (1979, p.37) afirma que um dos meios mais instrutivos para a análise das ações do sujeito é a construção de modelos de inteligência artificial, para obter de tais modelos uma teoria cibernética, a fim de atingir as condições necessárias e suficientes para a realização efetiva do funcionamento dos sistemas construídos a partir dessas ações.

No entanto, no caso do período operatório concreto, Grize[8] ressalta:

> A estrutura de agrupamento, que Jean Piaget introduziu em 1941, revelou-se difícil de ser formalizada completamente. As tentativas feitas até hoje são ainda pouco satisfatórias, no sentido de que todas comprometem, de uma maneira ou de outra, o pensamento de Piaget. (Piaget, 1976, p.90)

Esse projeto da formalização do período operatório-concreto era um problema que Piaget buscava resolver no contexto de seus estudos para a publicação do *Traité de logique* e, posteriormente, do *Ensaio*, pois, segundo o autor (1976), "[...] se é possível axiomatizar grandes estruturas acabadas, tais como as de grupos ou de redes[9] etc., a pergunta permanece aberta no que concerne às etapas anteriores" (p.XVI), por exemplo, a estrutura de agrupamento.

Uma das inúmeras dificuldades da formalização reside no fato de que uma operação concreta não é apenas uma ação interiorizada e coordenada em sistemas de conjuntos reversíveis: é preciso uma tomada de consciência, por parte do sujeito, do mecanismo das operações que realiza

---

8 Jean-Blaise Grize, lógico suíço, ajudou Piaget na reedição do livro *Traité de logique:* essai de logique opératoire (1949), dando origem à sua segunda edição, com o título *Essai de logique opératoire* (1976). Como apresentado na Introdução, utilizamos neste livro a versão traduzida para o português.

9 Segundo Piaget (1976):"De um modo geral, a rede [ou reticulado] é um conjunto parcialmente ordenado por uma relação que assinalaremos por $\leq$ e tal que, para todo par de elementos em E, se possa definir o menor majorante comum ou *supremum*, e o maior minorante comum ou *infimum*" (p.88). Por exemplo: "No caso de um sistema de classes, a relação de ordem seria a inclusão no sentido amplo $\subseteq$ e ter-se-ia: *supremum* de A e $B \cong A \cup B$ [e] *infimum* de A e $B \cong A \cap B$".

e de suas combinações. O próprio Piaget, juntamente com Inhelder, escreve:

> Na realidade, uma operação concreta não é apenas uma ação interiorizada e que se combina com outras, em sistemas de conjuntos reversíveis; é também, e por isso mesmo, uma ação que é acompanhada por uma tomada de consciência de seu mecanismo e de suas coordenações. (Piaget; Inhelder, 1976, p.4)

Nesse sentido, para Piaget, sem tal "[...] tomada de consciência de seu mecanismo e de suas coordenações", o sujeito epistêmico "age apenas para atingir o objetivo, e não se pergunta como é que o consegue" (Piaget; Inhelder, 1976, p.4). Por outro lado, comparados aos sujeitos do estágio anterior, entre os quais não há tal tomada de consciência, os sujeitos do nível operatório concreto "[...] não se limitam mais a agir, mas interiorizam suas ações sob a forma de operações [...]: portanto, tomam consciência do fato" (p.7).

É a partir dessa diferença fundamental entre ação interiorizada e operação que Tassinari (1998; 2011) realiza uma análise pormenorizada do papel da imagem mental na constituição do sistema das operações concretas e, por conseguinte, tenta determinar se existe uma única estrutura fundamental da qual as estruturas de classes e relações (estrutura de agrupamento, período operatório concreto) seriam subestruturas.

Essa concepção está de acordo com a crítica do epistemólogo Gilles-Gaston Granger, de que haveria uma lacuna, na obra de Piaget, na explicação da passagem da ação sobre a experiência sensível à estruturação lógico-matemática.

Tassinari (1998), em sua dissertação de mestrado, *Da experiência sensível à estruturação lógica do real:* um estu-

do da forma da construção do "agrupamento" em Piaget, bem como em Ferreira (2011), *Sobre o uso da função proposicional e sua gênese segundo a Epistemologia Genética*, mencionam a crítica de Granger. Porém, Tassinari (1998) também apresenta em sua dissertação a interpretação feita por Ramozzi-Chiarottino, que mostra o papel da imagem mental na construção do sistema de operações do sujeito epistêmico, interpretação da qual ele parte para explicar como se dá a passagem da ação sobre a experiência sensível até o aparecimento das estruturas lógico-matemáticas.

Tassinari (1998; 2011, p.31-46) então propõe uma estrutura fundamental para a lógica operatória concreta, para explicar como se dá a passagem da ação sobre a experiência sensível à estruturação lógico-matemática. O foco do trabalho é mostrar que existe uma única estrutura da qual as outras oito estruturas de agrupamento enunciadas nesta parte são subestruturas. Tal estrutura é denominada sistema de esquemas de transfigurações. Assim, o autor introduz uma noção que possibilita apresentar essa estrutura fundamental e responder como se dá a passagem da ação sobre a experiência sensível à estruturação lógico-matemática do real:[10]

> Chamaremos de transfiguração, por definição, uma ação, realizada endogenamente pelo sujeito epistêmico, que consiste em passar de uma imagem mental (que representa uma situação ou objeto que chamaremos estado 1) a outra imagem mental (estado 2) e que permite comparar os objetos ou situações representados, sendo que as imagens não podem estar fundidas [em] uma representação

10 Segundo Tassinari (2011): "Usamos o termo transfiguração, pois, na falta de um melhor, ele permite designar as ações interiorizadas (pertencentes, pois, ao aspecto operativo do conhecimento) sobre os elementos do aspecto figurativo do conhecimento (trans = movimento para além de, figura = imagem)" (p.36).

> imagética única, ou seja, o sujeito deve expressar em seu comportamento (o que mostra haver a consciência de) que se trata de dois objetos ou situações diferentes e que estão ligados por essa própria ação endógena que os compara. (Tassinari, 2011, p.36)

Tal noção de transfiguração é condição necessária (mas não suficiente) para a lógica operatória concreta, pois a ela deve-se somar a coordenação das transfigurações para que o sujeito seja capaz de estruturar lógico-matematicamente seu real. Logo, temos que a existência das transfigurações é condição tanto das classes individuais quanto da representação de uma transformação do real.

Tassinari (2011) também define um esquema de transfiguração como o "[...] conjunto das qualidades gerais de uma transfiguração, ou seja, daquilo que permite repetir a mesma transfiguração ou de aplicá-la a novos conteúdos" (p.37). Tal noção deriva da ideia de esquema de ação definida por Piaget e Beth (1961, p.251).

O sistema de esquemas de transfigurações e as operações concretas

A partir dos exemplos apresentados na parte anterior, em especial o exemplo sobre a capacidade da composição aditiva das classes (exemplo (**i**)), Tassinari (2011, p.43), no contexto das pesquisas sobre as relações entre ação interiorizada e operação, se pergunta: como explicar respostas nas quais a criança do período pré-operatório não consegue coordenar a parte e o todo?

Inicialmente, como vimos, Piaget afirma que o pensamento do sujeito pré-operatório só considera as relações das partes de um todo entre si, mas não a relação entre a parte A (ou A') e o todo B, pois, ao considerar um, esquece o outro (Piaget; Szeminska, 1975, p.235).

Tassinari (2011) então destaca:

> Apenas utilizando as transfigurações, o sujeito epistêmico é capaz de comparar a parte A e o todo B, e, nesse sentido, as transfigurações são necessárias para a constituição das operações relativas à classificação [por exemplo] (como as operações união e diferença). (p.44)

Notemos que a composição aditiva refere-se a uma transfiguração executada de A para B (acrescendo-se A' a A, isto é, $A + A' = B$) e que sua inversa é uma transfiguração de B para A (determinando-se a diferença entre B e A', isto é, $A = B - A'$).

Segundo Tassinari (2011), temos, então, a seguinte conclusão:

> Em resumo, podemos ver que o que falta à criança é a capacidade de uma ação mental, i.e., realizada endogenamente pelo sujeito epistêmico, que compare os elementos da percepção atual com outros imaginados, ou seja, falta-lhe a capacidade de passar de uma imagem mental (que represente a situação percebida, por exemplo, a parte A) a outra imagem mental (que represente uma outra possibilidade, como, por exemplo, o todo B) e comparar seus significados entre si, no caso, A e B, sem que um exclua o outro, entendendo que se trata de duas coisas diferentes que são ligadas por essa própria ação endógena que os compara. Ou seja, falta-lhe a capacidade de realizar transfigurações como aqui definidas. (p.44)

Segundo o autor, podemos pensar, a partir do exposto, que as operações concretas são esquemas de transfigurações ou que resultam da coordenação desses esquemas. Isso acontece porque as operações (**i**) são ações realizadas endogenamente pelo sujeito, (**ii**) podem realizar transformações de uma imagem mental a outra (isto é, modifica-

ções entre estados), (**iii**) permitem comparar os objetos ou as situações envolvidas, havendo a tomada de consciência, pelo sujeito, de que se trata de dois objetos ou de duas situações distintas e (**iv**) repetem ou aplicam as transfigurações a novos conteúdos, daí a generalização.

Evidentemente, a mera existência das transfigurações não é condição suficiente para o aparecimento da lógica operatória concreta, como vimos. No entanto, se tratarmos as operações concretas como esquemas de transfigurações, poderemos pensar o período operatório concreto como constituindo um sistema de esquemas de transfigurações, respondendo diretamente à crítica de Gilles Gaston Granger, como o fez Tassinari (1998; 2011). Abordaremos essas questões com mais detalhes na próxima parte.

Os digrafos como formas matemáticas do sistema de esquemas de transfigurações

Tassinari (2011, p.37) propõe uma estrutura matemática para o sistema de esquemas de transfigurações: os digrafos. Existe, portanto, uma formalização dessa nova estrutura epistêmico-psicológica fundamental, o sistema de esquemas de transfigurações, por meio da estrutura matemática a ela associada, os digrafos, estabelecendo uma relação entre uma estrutura epistêmico-psicológica e uma estrutura matemática.

A estrutura matemática de digrafos[11]

Definição 3.1. Um digrafo é uma estrutura matemática cujo domínio é um conjunto de pontos (chamados, por

11 Grande parte dos resultados expostos nesta parte (definições, notações, proposições etc.) foi inspirada nos trabalhos de Tassinari (2011, em especial, p.31-45).

definição, de vértices) e que tem apenas um predicado binário, um conjunto de linhas orientadas que ligam esses pontos (chamadas, por definição, de arestas direcionadas, de setas ou ainda de arcos)[12].

Notemos que, da definição de digrafo, segue necessariamente que um digrafo é uma estrutura matemática específica, conforme a Definição 1.5.

Notação 3.1. Denotaremos por xy o par ordenado associado a uma seta do ponto x ao ponto y.[13]

Vamos agora definir uma estrutura matemática particular de digrafos para relacioná-la com o sistema de esquemas de transfigurações. Para tal, consideremos inicialmente algumas definições.

Definição 3.2. Um digrafo-R ou um digrafo reversível[14] é um digrafo tal que, para toda seta xy, existe uma seta yx a ela reversa.

Do ponto de vista psicológico, podemos associar os digrafos-R à reversibilidade das ações (conduta do retorno, no período sensório-motor, por exemplo) ou mesmo a reversibilidade das operações, incluindo as transfigurações.

Definição 3.3. Um digrafo-P é um digrafo tal que, para todo vértice x e para algum vértice y, existe uma seta xy ou uma seta yx. Em outras palavras, um digrafo-P não tem pontos isolados.

---

12 Por questão de convenção, neste livro denominaremos de setas as linhas orientadas que ligam um par de vértices.

13 Tassinari (2011, p.38) sugere outras opções de notação, como a seta xy ou o par ordenado (x, y). No entanto, para não confundirmos a notação dos digrafos com as notações de operações parciais (em especial as operações parciais binárias), introduzidas no Capítulo 1, adotaremos simplesmente a notação xy para o digrafo que liga os vértices x, y.

14 Na literatura especializada, os digrafos-R são denominados simétricos. No entanto, para relacionar com a noção de reversibilidade das transfigurações, Tassinari (2011, p.38) utiliza a letra R.

Definição 3.4. Um digrafo-T, ou transitivo, é um digrafo tal que, se existe uma seta xy e outra seta yz, então existe uma seta xz.

Definição 3.5. Um digrafo-RPT é um digrafo que possui todas as propriedades anteriores.

Para verificarmos que todo digrafo-RPT possui essas três propriedades, Tassinari (2011) apresenta a seguinte proposição:

> Um digrafo é um digrafo-RPT se, e somente se, satisfaz as duas propriedades abaixo:
> 1. em todo vértice x existe uma seta de x para o próprio x; e
> 2. dados dois vértices x e y, ou existe seta de x para y e de y para x, ou eles não pertencem à mesma parte [i.e., os vértices x e y não são comparáveis do ponto de vista do sistema em questão]. (p.39)

Sobre a relação que podemos estabelecer entre os digrafos-RPT e o sistema de esquemas de transfiguração, o autor escreve que os vértices são os estados que a criança representa por meio de imagens mentais e, a cada transfiguração de um estado A para um estado B, teremos uma seta AB, possibilitando, assim, verificar que o digrafo do sistema de esquemas de transfigurações é um digrafo-RPT.[15] Assim, a estrutura de digrafos pode ser considerada como sendo uma estrutura matemática subjacente ao sistema de esquemas de transfigurações. Por isso, devemos notar que é possível verificar como as transfigurações satisfazem cada uma das propriedades R, P e T definidas anteriormente.[16]

15 A demonstração pode ser encontrada em Tassinari (2011, p.40).

16 Id., ibid.

Os digrafos como formas matemáticas do sistema de esquemas de transfigurações

Como vimos, a partir da Definição 3.1, temos que os digrafos-RPT são estruturas matemáticas específicas e, como a estrutura matemática associada ao sistema de esquemas de transfigurações é a estrutura de digrafo-RPT, podemos concluir que:

> A forma matemática dos sistemas de esquemas de transfigurações é um digrafo-RPT.

Podemos concluir, por fim, a partir do resultado geral apresentado no item Estruturas matemáticas específicas e operações parciais unitárias e da Definição 3.1, que a estrutura matemática digrafo-RPT, que é a forma do sistema de transfigurações, é constituída por um conjunto de conjuntos de operações parciais unitárias no conjunto dos indivíduos dessa estrutura.

Operações sobre símbolos e sua forma matemática

Nesta parte, designaremos as transfigurações e seus esquemas de operações sobre símbolos e mostraremos que as operações parciais podem ser consideradas formas matemáticas dessas operações.

Lembremos que o termo "transfiguração" designa uma ação interna, realizada pelo sujeito epistêmico, que consiste em passar de uma imagem mental x a outra imagem mental y, havendo a consciência de que se trata de duas situações ou objetos que são ligados por essa ação endógena que os compara.

A forma de uma transfiguração pode ser considerada uma operação parcial unitária f, tal que $f(x) = y$, ou ainda,

como vimos no Capítulo 1 (Notação 1.5), representada pelo par ordenado (x,y).

Assim, temos também que um esquema E de transfiguração pode ser representado como um conjunto de pares ordenados: o conjunto dos pares ordenados que representam as transfigurações com esquema E.

Logo, temos que, por definição, as transfigurações e seus esquemas são certos tipos de operações realizadas sobre imagens mentais.

Por outro lado, como vimos, um símbolo é "uma imagem evocada mentalmente ou um objeto simbólico materialmente escolhido intencionalmente para designar uma classe de ações ou objetos" (Piaget, 2008, p.185). Como as imagens mentais são símbolos, temos que as transfigurações são ações internas realizadas sobre símbolos.

Vimos também, no item "O sistema de esquemas de transfigurações e as operações concretas", que estas operações resultam da coordenação de esquemas de transfigurações e o período operatório concreto pode assim ser visto como constituído por um sistema de esquemas de transfigurações.

Do exposto, utilizaremos a expressão "operações sobre símbolos" para designar as transfigurações e seus esquemas. Nesse sentido, o período operatório concreto pode ser caracterizado pela constituição do sistema de operações sobre símbolos. Assim, as operações concretas de classificação e seriação descritas por Piaget no seu *Ensaio* (1976) são, segundo nossa convenção, o resultado de operações sobre símbolos, como argumentado por Tassinari (1998).

Em termos da forma matemática geral do período operatório concreto, temos que a ideia é que as transfigurações e seus esquemas definem tanto operações epistêmico-psicológicas e suas coordenações quanto possuem a forma de operações matemáticas parciais que constituem estruturas de digrafos-RPT.

Temos então o seguinte resultado geral.

> Os digrafos-RPT são as formas matemáticas das operações sobre símbolos que o sujeito realiza a partir do período operatório concreto.

No que diz respeito à correlação entre as estruturas epistêmico-psicológicas e as estruturas matemáticas, podemos dizer que a forma de tratar as ações e as operações sobre símbolos como operações parciais nos leva a considerar que existe uma conformação imediata desses dois tipos de operações: as operações matemáticas parciais unitárias são a forma das operações sobre símbolos (lembremos que, conforme a Proposição 1.5, as operações parciais unitárias podem ser consideradas estruturas matemáticas).

Mais adiante, iremos considerar ainda as operações sobre signos, em sentido análogo ao das operações sobre símbolos, mas nas quais os objetos e estados são designados por signos, e não por símbolos, o que nos levará a ver os próprios sistemas de operações sobre signos como sendo constituídos por operações parciais unitárias.

Do exposto, podemos responder a mais uma parte da pergunta fundamental deste livro: Como, a partir das relações entre estruturas epistêmico-psicológicas e estruturas matemáticas, o sujeito epistêmico compreende estas últimas?

Pelo exposto nesta parte, temos que existe uma estrutura matemática específica (os digrafos) associada a uma estrutura epistêmico-psicológica, o sistema de esquemas de transfigurações. Tal estrutura pode ser vista como constituída por um conjunto de conjuntos de operações parciais unitárias e, assim, em relação direta com a Definição 1.5 de estrutura. Devemos salientar que, enquanto o sujeito caminha para um pensamento lógico-operatório,

ele constitui uma estrutura epistêmico-psicológica necessária para o surgimento do pensamento operatório concreto, e tal estrutura, o sistema de transfigurações, possui uma estrutura matemática a ela associada. Pensamos a estrutura matemática como constituída por um conjunto de conjuntos de operações parciais unitárias, pois essa relação será fundamental para entendermos as operações parciais como formas de operações mentais em geral – não somente das operações sobre símbolos – e nos aproximar ainda mais da resposta à nossa pergunta inicial, através do sistema de operações sobre signos.

4
Como o sujeito compreende as estruturas lógico-matemáticas abstratas?

Assim se constituem as estruturas operatórias que, graças aos progressos da reversibilidade, adquirem um caráter extratemporal, que permite transcender o fluxo irreversível das ações iniciais: são então estas conexões extratemporais que, graças ao desenrolar ininterrupto das abstrações reflexionantes, fornecerão o dado cuja axiomatização é efetuada pela lógica dos lógicos.

(Piaget, 1983a, p.327)

Neste capítulo, elaboraremos nossas principais hipóteses para responder à pergunta: Como o sujeito compreende as estruturas lógico-matemáticas abstratas? Para tal, de acordo com o livro *Da lógica da criança à lógica do adolescente* (Piaget; Inhelder, 1976), apresentaremos as características gerais do período operatório formal ou hipotético-dedutivo e a passagem do período operatório concreto ao período operatório formal.

Para introduzirmos a noção de esquemas de transignações e a compreensão das estruturas lógico-matemá-

ticas, iniciaremos expondo a definição de transignação e mostraremos como o sistema de operações formais pode ser visto como resultado da coordenação de esquemas de transignações. A seguir discutiremos como o sistema de esquemas de transignação permite compreender as estruturas matemáticas. Finalmente, explicaremos a forma geral do funcionamento do sistema de operações sobre signos.

O período operatório formal

O pensamento do sujeito epistêmico, no período operatório concreto, está ligado diretamente aos objetos reais. Sua forma de equilíbrio,[1] atingida pelo sistema das operações concretas, chega a um conjunto limitado de transformações virtuais.[2] A noção da possibilidade[3] não passa

1 Piaget (1976) usa o termo "equilibração", em contraposição ao termo "equilíbrio", para mostrar que não se trata de um estado final a ser atingido, determinado desde o início, mas sim de um processo de "construções sucessivas com elaborações constantes de estruturas novas" (p.7) que conduzem "não a formas estáticas de equilíbrio, mas a reequilibrações melhorando as estruturas anteriores". Sobre a noção de equilibração, ver Ramozzi-Chiarottino (1972, Cap. 2); Apostel; Mandelbrot; Piaget (1957); e Piaget (1976).

2 Chamam-se transformações virtuais em oposição às transformações reais. Uma operação é uma ação interiorizada, reversível e coordenada em estruturas totais. As transformações virtuais dizem respeito às operações, e não meramente às ações (transformações "reais").

3 A noção de possibilidade, nesse contexto, está ligada à ideia de o sujeito criar hipóteses segundo as possibilidades compatíveis com a situação dada. Diz-se que o possível não passa de mera extensão do real, no sentido de que, ao deparar com um problema, o sujeito de pensamento operatório concreto age desde o início, e apenas procura, com essas ações, coordenar as leituras sucessivas dos dados que obtém, estruturando a realidade na qual atua. Se ele

de um prolongamento do real na direção do virtual, não estando definitivamente aberta para um campo amplo de hipóteses. Nesse período, diante de um problema apresentado, a criança apenas age desde o começo, estruturando a realidade atual por meio de tentativas de coordenação das leituras dos resultados obtidos. Se ela cria hipóteses, diz Piaget, elas não passam de "projetos de ações possíveis", não construindo assim um conjunto de hipóteses, uma teoria propriamente dita, característica do período operatório formal.

No pensamento formal, segundo Piaget (1976, p.189), existe uma inversão de sentido entre o possível e o real:[4] o real se subordina ao possível, e o sujeito considera que os fatos se tornam fatos propriamente ditos somente após uma verificação efetiva, verificação essa que se refere às hipóteses criadas e compatíveis com a situação dada. O fato, portanto, é resultado da experimentação das hipóteses admitidas como possíveis.

Nesse período do desenvolvimento, diferentemente da dedução concreta, a dedução formal não se refere às

cria hipóteses, diz Piaget, é preciso admitir que tais hipóteses são meros projetos de ação possíveis, e não formas de imaginar o que deveria ser o real, caso tal hipótese fosse satisfeita ou não. Nesse sentido, o possível é mera extensão do real (Piaget, 1976, p.188).

4 Com relação à sua forma, o possível, como vimos, "reduz-se a um simples prolongamento virtual das ações ou operações a um conteúdo dado. Por exemplo, depois de ter seriado vários objetos, o sujeito *sabe* que pode continuar a seriar outros (possibilitado pelo mesmo esquema *antecipador* de seriação, que lhe permite efetuar sua seriação real)" (Piaget, 1976, p.218-9, grifos nossos). Por outro lado, com relação ao seu conteúdo, "o pensamento concreto apresenta esta particularidade limitativa de não ser imediatamente generalizável a todos os conteúdos, mas de proceder domínio por domínio, com uma defasagem que às vezes chega a vários anos entre a estruturação de um conteúdo e o seguinte" (Piaget, 1976, p.219).

realidades atuais (isto é, atualmente percebidas), mas às ligações entre as hipóteses enunciadas e o resultado buscado, portanto, às proposições (referidas às hipóteses ou aos dados, estes independentes do seu caráter real). Por isso, o pensamento formal é fundamentalmente hipotético-dedutivo. Deduzir, segundo Piaget (1976), "consiste, então, em ligar entre essas suposições, e delas deduzir suas consequências *necessárias*, mesmo quando sua verdade experimental não ultrapassa o possível" (p.189, grifo nosso).

Os sujeitos do nível operatório concreto seriam, sem intervenção, pedaços de madeira segundo seus comprimentos. Piaget (1976) escreve: "coordena[m], por um elemento E, as duas relações $E > D > C > B > A$ (já colocadas) e $E < F < G < H$ etc. (elementos restantes)" (p.189), portanto, as relações "mais que" (ou "maior que") e "menos que" (ou "menor que"). Por outro lado, o problema formal "Edith é mais loira do que Suzana e Edith é mais morena que Lili; qual a mais morena das três?" só é resolvido entre 11 e 12 anos, mesmo que a seriação concreta das cores dos cabelos, do ponto de vista formal, não seja mais difícil do que a dos comprimentos dos pedaços de madeira. Portanto, há, segundo Piaget, intervenção de outra coisa na resolução desses problemas que não a mera explicitação, em enunciados, das operações concretas. Ainda segundo o autor (1976, p.190), o exame das imagens mentais mostra que a representação concreta é inadequada nesse caso, uma vez que o sujeito não chega a traduzir os dados em representações de imagens: ele é obrigado a criá-los como simples hipóteses, a fim de deduzir as consequências necessárias.

Dessa obrigatoriedade tem-se, para Piaget (1976, p.190), uma segunda e importante caracterização do período operatório formal: sua nova lógica. Ele ressalta que,

"[...] quando os objetos são substituídos por enunciados verbais, superpomos uma nova lógica – a das proposições – à das classes e relações que se referem a esses objetos" (p.190). Tal lógica das proposições supõe um conjunto mais extenso de possibilidades operatórias em relação ao período precedente, uma vez que a forma de tal pensamento leva o sujeito a elaborar problemas e a criar seus próprios meios para solucioná-los, enquanto no operatório concreto os problemas derivam diretamente dos dados experimentais. Esse é um fator bastante profícuo para constatar a hipótese de que o pensamento formal é muito mais do que simplesmente a tradução, em palavras, das operações ligadas aos objetos como tais. Ao contrário, "[...] é durante as manipulações experimentais que se afirma [...] uma série de possibilidades operatórias novas, formadas por disjunções, implicações, exclusões etc., que intervêm desde a organização da experiência e desde a leitura dos dados de fato" até os agrupamentos – de classes e relações (Piaget, 1976, p.190). Novamente, não existe estruturação direta dos dados atualmente perceptíveis. Há, ao invés disso, sempre a mediação do possível, hipoteticamente enunciado:

> Portanto, o característico da lógica das proposições não é, apesar das aparências e da opinião corrente, ser uma lógica verbal: é, antes de tudo, uma lógica de todas as combinações possíveis do pensamento, tanto no caso em que tais combinações aparecem com problemas experimentais, quanto no caso em que aparecem diante de problemas puramente verbais. Sem dúvida, tais combinações se superpõem, graças às hipóteses, à simples leitura dos dados, e supõem também um apoio verbal interior; mas não é esse apoio que constituiu o motor efetivo da lógica das proposições. Esse motor é o poder de

> combinar, graças ao qual ela insere o real no conjunto das hipóteses possíveis, compatíveis com os dados. (Piaget, 1976, p.190)

Uma terceira característica do pensamento formal é a constituição de um sistema de operações de segunda potência. Considerando as operações concretas como operações de primeira potência, pois se referem essencial e diretamente aos objetos concretos, como a construção de relações entre os elementos dados, as operações de segunda potência caracterizam-se por serem "relações de relações". Nesse caso, a lógica das proposições supõe, ela mesma, operações de segunda potência, pois as "operações interproposicionais se referem a enunciados cujo conteúdo intraproposicional é formado por operações de classes e de relações" (Piaget, 1976, p.191), portanto, de operações de primeira potência. Ainda, essas operações de segunda potência exprimem mais uma vez, segundo Piaget, o caráter de generalidade inerente ao pensamento formal, qual seja, o de ultrapassar o conjunto de transformações subordinadas ao real, inserindo-as num sistema de combinações hipotéticas e dedutivas, portanto, possíveis.

A característica inerente ao pensamento operatório formal subjacente às três anteriormente apresentadas é aquela na qual esse pensamento é capaz de pensamento por combinatória: apenas uma combinatória constrói de fato o conjunto dos possíveis de que tratamos até aqui (e que, portanto, inverte o sentido entre o real e o possível com relação ao pensamento operatório concreto).

Entretanto, apesar de a combinatória estabelecer o conjunto dos possíveis e possibilitar a inversão de sentido entre o real e o possível, segundo Piaget (1976): "[...] é a subordinação do real ao possível que efetivamente caracteriza o pensamento formal" (p.191).

Mas como se dá a passagem do período operatório concreto ao operatório formal? Tal questão nos leva à próxima parte.

A passagem do operatório concreto ao operatório formal

O equilíbrio do pensamento operatório concreto é limitado seja pela forma das ligações do sistema, seja pelo conteúdo das noções que se aplicam às operações. (**i**) De sua forma, as operações concretas estruturam[5] diretamente os dados reais, classificando, seriando, colocando em correspondência etc. Portanto, o sujeito desse nível insere, num conjunto de classificações e de seriações, os conteúdos específicos (comprimentos, pesos, volumes etc.). É nesse sentido que dizíamos que o possível não passa de mero prolongamento das próprias operações, aplicadas ao conteúdo dado, em direção ao virtual. (**ii**) De seu conteúdo, o pensamento operatório concreto, diferente do que se apresentará no operatório formal, não é generalizável a todos os conteúdos. Isso quer dizer que os sujeitos procedem domínio por domínio, passando a estruturar os diferentes conteúdos com até anos de dife-

5 Dizemos que o sujeito epistêmico, executando as operações (concretas ou formais), estrutura a realidade ou suas estruturas ulteriores no sentido expresso anteriormente: é próprio das operações constituir sistemas. Essa concepção, como já tratamos, é análoga àquela em que as estruturas matemáticas são definidas por meio de operações sobre certos conjuntos de elementos. Da mesma forma, as operações (concretas e formais) são executadas sobre conjuntos de objetos (ainda que, na maioria das vezes, tais conjuntos não sejam especificados, principalmente para o sujeito epistêmico). Nesse sentido, as operações constituem estruturas ou, em outras palavras, estruturam o real.

rença (por exemplo, no caso dos comprimentos e depois dos pesos ou volumes).

Segundo Piaget (1976, p.205-6), enquanto os sujeitos operatórios concretos procedem conteúdo por conteúdo, a realidade cedo ou tarde impõe uma mistura de tais conteúdos, exigindo que utilizem novos instrumentos operatórios. De fato, no pensamento formal, os domínios, até então considerados qualitativamente heterogêneos (comprimentos, superfícies, pesos, velocidades, volumes etc.), interferem uns nos outros mutuamente, reunindo, em um único sistema, os diversos conteúdos que se influenciam e que antes eram considerados de modo independente, como se não imbricassem um ao outro. Nesses moldes, um dos meios pelo qual o pensamento formal opera é justamente pelas relações de relações, isto é, operações de segunda potência: a primeira serve como classificação ou seriação de objetos concretos; a segunda, por sua vez, envolve uma reorganização, por abstrações, de objetos já organizados por meio de classes ou relações. Quais os métodos usados pelo sujeito nessa nova forma de pensamento?

Dois métodos são então simultaneamente empregados pelo sujeito, conforme explicita Piaget (1976): (**i**) como dito, o sujeito operatório formal procura coordenar entre si os resultados das operações concretas; para tal, como o pensamento formal considera que os domínios ou conteúdos se imbricam um ao outro, é preciso então que o raciocínio usado por ele elimine as contradições que surgem dessa mesma interferência de domínios, para então considerar o sistema enquanto tal; além disso, (**ii**) o sujeito coordena diretamente entre si as distintas operações que são características dos agrupamentos de classificação e de seriação. Ainda segundo Piaget (1976), esses dois métodos, que conduzem à descoberta da lógica formal das proposições, consistem, portanto, em:

> 1) Dissociar a realidade bruta, e, portanto, os conteúdos dessas operações, em função das diversas combinações possíveis. 2) Coordenar os diversos agrupamentos de classes e de relações num único sistema total. Ora, por mais diferentes que esses processos possam parecer entre si, veremos que na realidade se reduzem a um só, pois o segundo repousa, como o primeiro, numa combinatória. O problema real é, portanto, compreender como nasce essa combinatória. (p.212)

As observações de Piaget mostraram que, no nível das operações concretas, o sujeito procura estruturar os dados da maneira como lhe são acessíveis, mas é definitivamente limitado ao real. Portanto, ele não dissocia os fatores (conteúdos), classificando, ordenando, estabelecendo correspondência etc. apenas entre os fatos que observa diretamente. Estrutura assim os domínios um após o outro, sem inseri-los num único sistema coordenado, como vimos. No entanto, ao se pedir ao sujeito que resolva os problemas quando é necessário coordenar os diversos domínios (vários fatores heterogêneos), o pensamento concreto apresenta raciocínios que não se coordenam entre si, e os resultados são incoerentes ou mesmo contraditórios. Assim, "quanto mais o sujeito analisa concretamente a realidade ([...] por simples correspondências entre conteúdos distintos), mais esta lhe apresenta misturas de regularidades parciais e exceções, e que não podem ser interpretadas com segurança" (Piaget, 1976, p.212).

É justamente a tentativa de dissociar os fatores que conduz ao aparecimento do pensamento operatório formal, segundo Piaget (1976, p.212-6). Inicialmente, observa, é natural que o sujeito despreze as regularidades parciais e as exceções das quais falamos anteriormente.

No entanto, quando o resultado depende de uma análise que leve em conta mais do que os simples fatos brutos, impõe-se uma nova atitude experimental, a qual se generaliza somente no nível formal:

> Uma vez classificados, seriados, igualados, colocados em correspondência etc. os diversos aspectos da situação que condicionam a solução de um problema, pode ser necessário, para resolvê-lo, reunir num único sistema as operações até então realizadas, e é a isso que conduz, exatamente, a necessidade de coordenar entre si seus resultados, quando são insuficientemente coerentes. (Piaget, 1976, p.216)

Não há qualquer operação concreta que reúna diretamente os agrupamentos de classes e de relações num sistema único. Suas formas não se ampliam além de simples inclusões por adição ou por multiplicação e, portanto, não há o conjunto das partes, uma combinatória que surge, segundo Piaget, espontaneamente no pensamento do sujeito.

No entanto, há um agrupamento mais geral do que os outros, tanto para as classificações quanto para as seriações, ainda no operatório concreto. É mais geral do que os outros porque os contém ou porque os outros dele derivam: é o agrupamento multiplicativo de classes ou de relações, que consiste no mínimo de dupla entrada. Segundo Piaget (1976):

> O agrupamento concreto mais geral é o agrupamento multiplicativo (de classes ou de relações) que consiste de tabelas de dupla entrada (ou tripla etc.). Esta maneira de agrupar os dados equivale, portanto, para dois acontecimentos ou propriedades, *x* e *y*, a construir as associações

elementares ($xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \overline{xy}$) [nas quais $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são os complementares de x e y, respectivamente]. No entanto, como acabamos de ver no caso da dissociação de fatores e da combinatória que disso decorre, novos problemas se apresentam para o sujeito, logo que precisa decidir quais, entre essas associações, são verdadeiras, e qual é a significação que deve ser atribuída a esses subconjuntos. Como é que procede nesse caso? É muito interessante verificar que essa escolha ou essa verificação dos subconjuntos de associações verdadeiras, entre as possibilidades ($xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \overline{xy}$), se devem a simples operações de classificação, mas aplicadas às associações (xy etc.) e generalizadas a todos os casos possíveis: o sujeito reúne assim os casos [...] como se se tratasse de uma reunião de objetos qualificados por suas propriedades comuns, quando, na realidade, se trata de reunir as associações, isto é, as situações nas quais duas propriedades se apresentam juntas (ou uma sem a outra etc.) ou ainda, onde dois acontecimentos se produzem ao mesmo tempo (ou um sem o outro etc.). Em outros termos, o sujeito, partindo do conjunto multiplicativo ($xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \overline{xy}$), constrói seu "conjunto de partes" através de uma nova classificação: portanto, aplica o mais simples dos agrupamentos (a classificação) ao mais geral (a tabela das multiplicações lógicas), chegando assim a uma espécie de agrupamento de segunda potência que coordenará todos os agrupamentos num sistema superior, uma vez que não pode ligá-los diretamente entre si. Ora, esse agrupamento de segunda potência por aplicação da classificação generalizada às associações multiplicativas não é mais do que uma combinatória n por n [...]. (p.216)

Temos então as seguintes consequências:

1) Até então, as classificações realizadas pelos sujeitos eram inclusões simples, um agrupamento ainda

muito elementar. Agora, diferentemente, trata-se de incluir subconjuntos de associações uns nos outros, numa forma de agrupamento multiplicativo, levando em conta as diversas possibilidades, o que chega a uma combinação n por n. O sistema novo não é uma classificação simples ou uma inclusão elementar. É, antes, uma classificação generalizada ou, segundo Piaget, "o conjunto de todas as classificações possíveis compatíveis com as associações de base que são dadas", e é isso que constitui a estrutura baseada no conjunto das partes.

2) A negação de uma combinação será o conjunto das outras (ou sua complementar em relação a todo o resto do sistema). Por exemplo, a negação da combinação xy é a reunião de todas as outras combinações ($x\bar{y} + \bar{x}y + \overline{xy}$), ou, como diz Piaget (1976, p.218), a incompatibilidade x e y.

3) Tal sistema, em função das negações apresentadas (Piaget fala em inversões) e das reciprocidades inerentes às operações, constitui, portanto, um grupo de quatro transformações (INRC).[6]

4) Nesse caso, o raciocínio não se refere apenas ao real, mas também ao real em função do possível. Efetivamente, a reunião (+) não é mais aqui uma adição de casos reais, pois não podem sempre realizar-se

6 Segundo Piaget (1976): "O conjunto das quatro transformações I [idêntica ou elemento neutro], N [inversa ou negação], R [recíproca] e C [correlativa] constitui um grupo comutativo relativamente à sua composição. Através da composição de cada dois desses quatro elementos, garantimos que (i) a composição de dois elementos do conjunto é ainda um elemento do conjunto, como $RN = C$, por exemplo; (ii) a composição é associativa; (iii) cada elemento tem um inverso (que é ele mesmo); (iv) existe um elemento neutro; e (v) a composição é comutativa" (p.272).

> ao mesmo tempo, mas uma reunião dos possíveis, e é por isso que a operação fundamental da lógica das proposições é indicada por ∨ (símbolo usual da disjunção), no sentido de "ou".

Resumidamente, assim que o sujeito coordena os agrupamentos concretos em um único sistema, em segunda potência, o pensamento se torna formal, porque se refere às combinações possíveis, e não mais aos objetos em si mesmos. Segundo Piaget (1976), o pensamento formal "se orienta para uma nova forma de equilíbrio, caracterizado por uma nova estrutura de conjunto que deriva ao mesmo tempo do reticulado e do grupo das inversões e reciprocidades" (p.219).

Como veremos a seguir, o sistema de operações sobre signos é uma estrutura epistêmico-psicológica cujo surgimento é solidário com as outras estruturas construídas nos períodos precedentes e também apresenta todas as características do período hipotético-dedutivo descritas nesta parte, em conformidade com o pensamento de Piaget (1976). Passaremos agora a tratar algumas noções necessárias para a compreensão das estruturas matemáticas para, posteriormente, explicitar de maneira mais específica as características do sistema de operações sobre signos relacionadas ao período hipotético-dedutivo, buscando entender o funcionamento de tal estrutura epistêmico-psicológica.

Os esquemas de transignações e a compreensão das estruturas lógico-matemáticas

Iniciaremos esta parte apresentando a definição de transignação e mostraremos como o sistema de operações

formais pode ser visto como resultado da coordenação de esquemas de transignações. Em seguida, discutiremos como o sistema de esquemas de transignação nos permite compreender as estruturas matemáticas. Por fim, apresentaremos a forma geral do funcionamento do sistema de operações sobre signos.

Transignações e esquemas de transignações

No capítulo anterior, definimos transfiguração a partir dos trabalhos de Tassinari (1998; 2011). Tal definição foi elaborada para responder ao problema apresentado pelo epistemólogo Gilles Gaston Granger de que haveria uma ruptura, na obra de Piaget, na explicação da passagem da ação sobre a experiência sensível à estruturação lógico-matemática do real. Como vimos, a transfiguração constitui uma ação interna que leva uma imagem mental (que representa uma situação ou estado 1) a outra imagem mental (que representa uma situação ou estado 2), havendo consciência, por parte do sujeito, de que se trata de duas situações ou estados diferentes ligados por essa ação interna que os compara. Assim, a transfiguração é condição necessária para a lógica operatória concreta. Em especial, a imagem mental tem papel fundamental na constituição do pensamento do sujeito característico do período operatório concreto e permite uma interpretação distinta daquela apresentada por Granger.

O termo "transfiguração", então, permite designar ações interiorizadas sobre elementos do aspecto figurativo do conhecimento (trans = movimento para além de, figura = imagem). Resumidamente:

(**i**) "Transfiguração" é o termo que designa uma operação concreta de uma imagem mental a outra.

(**ii**) O esquema de transfiguração é a forma geral de certas transfigurações. Em outras palavras, ele é a compreensão dessas transignações, na medida em que o esquema é a forma geral dessas transignações realizadas segundo uma intenção do sujeito.
(**iii**) A coordenação de esquemas de transfiguração é ainda um esquema. (Tassinari, 1998; 2011).

Por outro lado, vimos que o período operatório formal tem como características: a possibilidade de o sujeito pensar hipoteticamente e de construir teorias; a possibilidade de realizar operações de segunda potência; a capacidade de realizar uma combinatória exaustiva; e uma inversão de sentido entre o possível e o real. Nesses casos, ele não apenas se utiliza de signos para a representação dos objetos e das situações, como também se mostra capaz de agir internamente ou operar sobre tais signos e seus significados, em uma estrutura operatória nova que vai muito além das transfigurações, pelas quais agia internamente apenas sobre imagens mentais. Para considerar essa nova capacidade, apresentamos as definições de transignações e seus esquemas, de forma análoga àquela utilizada para as noções de transfiguração e seus esquemas.

Definição 4.1. Chamamos de transignação a uma ação, realizada endogenamente pelo sujeito epistêmico, que consiste em passar de um signo (que representa uma situação ou objeto que chamaremos de estado 1) a outro signo (estado 2) e que permite comparar os estados 1 e 2, sendo que os signos não podem estar fundidos em uma representação sígnica única, ou seja, o sujeito deve expressar em seu comportamento (o que mostra haver a consciência de) que se trata de dois estados distintos ligados por essa própria ação endógena que os compara.

E, da mesma forma que Piaget e Beth (1961, p.251) definem um esquema de ação e Tassinari (2011, p.37) define um esquema de transfiguração, temos a seguinte definição:

Definição 4.2. Um esquema de transignação é a forma geral de certas transignações, ou seja, é o conjunto de qualidades gerais de uma transignação.

Temos então que o esquema de transignação é o que permite repetir a mesma transignação ou aplicá-la a novos conteúdos.

Além disso, como, para a Epistemologia Genética, a coordenação de esquemas de ações é ainda um esquema de ação (como o considera também Tassinari, 1998; 2011 sobre a coordenação de esquemas de transfigurações), podemos dizer que a coordenação de esquemas de transignações é ainda um esquema de transignação.

Notemos que, na medida em que, no período operatório formal, qualquer objeto, incluindo aqueles representados por imagens mentais, pode vir a ser um signo, inclusive por uma convenção de designação estabelecida pelo próprio sujeito, então as estruturas operatórias de transignação ampliam consideravelmente as estruturas operatórias de transfiguração.

Na medida em que um esquema de transignação é uma operação sobre signos, no sentido de uma ação interiorizada que se apoia sobre signos, então seu surgimento possibilita a lógica operatória formal, sendo, pois, também um sistema de operações de "segunda potência". Lembremos que, conforme Piaget (1976), as "operações interproposicionais se referem a enunciados cujo conteúdo intraproposicional é formado por operações de classes e de relações" (p.191). Como uma proposição é constituída por signos, temos que as operações sobre signos referem-se também a operações sobre enunciados, cujo conteúdo refere-se, por sua vez, a operações concretas.

Apresentaremos a seguir nossas hipóteses para explicitar como, a partir da Epistemologia Genética, o sujeito epistêmico compreende as estruturas lógico-matemáticas abstratas.

A compreensão das estruturas lógico-matemáticas abstratas

Notemos inicialmente que, segundo Piaget e seus colaboradores: "A extensão de um esquema é a reunião das extensões de ações das quais ele é o esquema. A compreensão de um esquema é o esquema em si mesmo" (Apostel et al., p.48). Assim, o esquema de uma transignação é justamente a compreensão dessa transignação.

A partir das definições de transignação e de esquema de transignação, temos os seguintes resultados:

1) Assim como uma transfiguração pode ser denotada por xy (cf. Notação 3.1) ou por (x,y), temos que uma transignação também pode ser representada pelo par (x,y), no qual x designa o signo 1 e y designa o signo 2.

2) Nesse caso, (x,y) representa a operação parcial unitária (e unária) definida apenas para o signo x, e o resultado da aplicação de (x,y) a x é o signo y. Logo, uma transignação (x,y) é também uma operação parcial unitária (e unária).

3) Notemos que a junção de signos é ainda um signo. Por exemplo, temos que o signo (x,y) é formado pela junção dos signos: (, x, y e). Logo, podemos considerar que uma n-upla de signos, por exemplo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, constitui um único signo.

4) Assim, pela Notação 1.5, qualquer $(n + 1)$-upla da forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$ representa uma transig-

nação que parte do signo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e chega ao signo a_{n+1}. Inversamente, toda transignação, quando o estado x é composto por n elementos, pode ser representada pela $(n + 1)$-upla: $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$.

5) Por outro lado, na medida em que o sujeito realiza a mesma transignação, isto é, aplica a mesma forma de operação a outro conteúdo (n-uplas), ele tem posse de um esquema E de transignação. Assim, um esquema E de transignação determina um conjunto C de transignações: as transignações em C são justamente as transignações que têm o esquema E.

6) Temos, pois, que, por um lado, os esquemas de transignações determinam conjuntos de transignações e, por outro, conjuntos de transignações determinam esquemas de transignações. Neste último caso, dado um conjunto C de transignações, podemos considerar que uma transignação tem o esquema E se, e somente se, pertence ao conjunto C.

Para melhor entendimento do exposto nos itens anteriores, consideremos o seguinte exemplo, já relacionando os resultados apresentados com a compreensão de uma estrutura matemática abstrata.

Consideremos a estrutura $<N,\{\},\{s\}>$, isto é, a estrutura matemática específica com a operação sucessor (já apresentada no Capítulo 1) sobre o conjunto dos números naturais. Notemos que, nesse caso, os números naturais são representados por numerais e, por questão de convenção, vamos usar aqui os numerais arábicos.

Como compreendemos essa estrutura matemática segundo o que foi exposto até o presente momento?

Lembremos que a operação sucessor é uma função unária s do conjunto dos números naturais para o conjun-

to dos números naturais, tal que, por exemplo, $s(0) = 1$, $s(1) = 2$, $s(2) = 3$ etc.

Nesse caso, temos que cada aplicação *s* sobre um número define uma operação parcial no conjunto dos números naturais. Por exemplo, a aplicação $s(0) = 1$ define a operação parcial unária (0,1), que está definida apenas para o elemento 0 e tem como resultado o elemento 1. De forma geral, *s* determina o conjunto de operações parciais unitárias da forma $(x, s(x))$ sobre o conjunto dos números naturais.

Por outro lado, como associado a cada número natural temos o numeral arábico correspondente, a cada operação parcial unitária da forma $(x, s(x))$ está associada direta e univocamente a transignação (y, z), que é uma operação parcial unitária no conjunto dos numerais arábicos, tal que y é o numeral arábico correspondente a x, e z é o numeral arábico correspondente a $s(x)$. Assim, por exemplo, associada à operação parcial unitária (0,1) sobre números naturais está direta e univocamente a transignação (0,1), sendo que, para evitar ambiguidade, 0 e 1 designam os numerais arábicos que usamos para designar os números 0 e 1. De forma geral, existe um isomorfismo entre o conjunto de operações parciais unitárias da forma $(x, s(x))$ sobre o conjunto dos números naturais e o conjunto de transignações da forma (y, z) sobre o conjunto dos numerais arábicos.

Logo, o esquema de transignação *s* determina o conjunto de pares ordenados $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), ...\}$ e como um esquema de transignação, do ponto de vista da Epistemologia Genética, é compreensão, temos que o sujeito que o possui compreende a forma geral dessas transignações e, portanto, compreende a estrutura matemática $<N,\{\},\{s\}>$ (e as estruturas matemáticas em geral) por meio de um conjunto de esquemas de transignações.

Mais ainda, como os numerais arábicos são signos, o sujeito pode atribuí-los a diversos conteúdos e, em especial, pode corresponder a cada numeral *n* os conjuntos que têm *n* elementos. Assim, a estrutura $<\mathrm{N},\{\},\{\mathrm{s}\}>$ adquire não apenas uma significação abstrata, mas também concreta, na medida em que ordena os conjuntos segundo o número de seus elementos.

Notemos que essa correspondência de um numeral *n* a um conjunto se dá, em geral, por uma contagem (esquema de ação) do sujeito ao associar o signo 1 a um elemento do conjunto, o signo 2 a outro elemento e, assim por diante, até esgotar todos os elementos do conjunto.

Tratando agora da compreensão das estruturas matemáticas em geral, lembremos que, mais uma vez, pela Definição 1.5, uma estrutura matemática A é constituída por um conjunto não vazio $|A|$ de elementos, um conjunto P_A de predicados n-ários em $|A|$ e um conjunto F_A de funções n-árias de $|A|^n$ em $|A|$.

Notemos então que utilizamos signos para referenciar os indivíduos do domínio das estruturas específicas (e, como também podemos verificar, das estruturas matemáticas abstratas). Inversamente, em princípio, podemos supor que é possível a atribuição de um signo (constante) a cada elemento da estrutura, como o faz Shoenfield (1967, p.18). Nesse caso, dizemos que cada constante é o nome de um indivíduo da estrutura.

Temos então os seguintes resultados:

1) Vimos que uma estrutura matemática específica é caracterizada pelo domínio da estrutura e pelos predicados n-ários e funções n-árias.

2) Pelos dados anteriores, é possível, em princípio, considerar que os elementos do domínio da estrutura são designáveis por signos e, como vimos, cada

função n-ária e cada predicado n-ário é um conjunto de n-uplas, logo, cada um desses pode ser representado através de um esquema de transignação, o que nos leva ao seguinte resultado geral.
Uma representação de uma estrutura matemática específica pode ser considerada um sistema de esquemas de transignação.

3) Mais ainda, se, como escrito anteriormente, podemos considerar que uma estrutura matemática específica $< |A|, P_A, F_A >$ constitui uma forma matemática: as propriedades e as relações comuns a todas as estruturas isomorfas a $< |A|, P_A, F_A >$, logo, a forma de um sistema de esquema de transignações que representa uma estrutura matemática específica constitui uma estrutura matemática específica apenas formal (independente dos signos que podem ser escolhidos para explicitá-las).[7]
A ideia aqui, como no caso das transfigurações, é que as transignações e seus esquemas definem tanto operações epistêmico-psicológicas e suas coordenações quanto têm a forma de operações matemáticas e seus sistemas. Ou seja, tem-se uma conformação imediata entre as operações epistêmico-psicológicas e as operações matemáticas enquanto forma daquelas.

4) Assim, o sujeito pode compreender as estruturas matemáticas específicas e abstratas na medida em que pode compreender esse jogo de signos esta-

---

7 Nesse ponto, temos todos os problemas e dificuldades inerentes à representação das estruturas matemáticas abstratas como estudado em teoria de modelos, e não é nossa intenção aqui tratar esses problemas, apenas fornecer o ponto de contato entre as estruturas epistêmico-psicológicas e as estruturas matemáticas.

belecidos pelos sistemas de transignações (sendo que, em geral, essa compreensão é parcial, pois nossas representações das estruturas matemáticas abstratas são, em geral, parciais, ou ainda, em termos técnicos, as axiomatizações não são completas ou são incompletáveis, como no caso da Aritmética, segundo os teoremas da incompletude de Gödel)[8].

Por fim, por razões análogas àquelas apresentadas anteriormente, utilizaremos a expressão "operações sobre signos" para designar as transignações e seus esquemas (ou, em outras palavras, as operações formais são, segundo nossa convenção, operações sobre signos; lembremos que o termo "transignação" designa uma ação interna, realizada pelo sujeito epistêmico, e que consiste em passar de um signo a outro, havendo a consciência de que se trata

---

8 Sobre os teoremas da incompletude de Gödel, bem como o debate sobre suas implicações e os limites das representações formais de estruturas, sugerimos a leitura da tese de doutorado de Ricardo Pereira Tassinari, *Incompletude e auto-organização:* sobre a determinação de verdades lógicas e matemáticas (2003). De acordo com esse trabalho, o primeiro metateorema da incompletude de Gödel (1931) seria: "Para toda extensão axiomatizada T de N, existe, e podemos exibir, uma fórmula fechada G tal que: (i) G é verdadeira no modelo padrão N e (ii) G não é teorema de T e se T é ω-consistente, então $\neg G$ não é teorema de T". De acordo com o autor: "O metateorema [anterior] permite estabelecer [...] que uma extensão consistente axiomatizada T de N é incompleta em pelo menos dois sentidos: (1) No sentido [...] que existe uma fórmula fechada G que não é decidível em T, i.e., nem ela, nem sua negação, são teoremas de T; e (2) [...] não existe uma extensão consistente axiomatizada T de N cujos teoremas sejam exatamente as fórmulas verdadeiras no modelo padrão" (p.94). Em relação ao segundo metateorema da incompletude de Gödel: "Para toda extensão consistente axiomatizada T de N, a fórmula de T que afirma que T é consistente não é teorema de T".

de dois signos diferentes ligados por essa ação endógena que os compara).

Logo, a partir do exposto tanto no capítulo precedente como neste capítulo, temos a seguinte conclusão:

> As operações matemáticas parciais *n*-árias e unitárias são formas matemáticas das operações mentais, isto é, das operações sobre símbolos em geral e das transfigurações em particular, e das operações sobre signos em geral e das transignações em particular.

Passemos agora à explicitação do sistema de operações sobre signos.

O funcionamento do sistema de operações sobre signos

Para compreender o funcionamento da estrutura epistêmico-psicológica que propomos neste livro, com base na Epistemologia Genética, é necessário entender, primeiramente, o motivo pelo qual denominamos tal estrutura de sistema de operações sobre signos.

Lembremos inicialmente a definição de estrutura, conforme apresentada no Capítulo 2. Segundo Piaget (1979):

> Uma estrutura é um sistema de transformações que comporta leis enquanto sistema [...] e que se conserva ou se enriquece pelo próprio jogo de suas transformações, sem que estas conduzam para fora de suas fronteiras ou façam apelo a elementos exteriores. Em resumo, uma estrutura compreende os caracteres de totalidade, de transformações e de autorregulação. (p.6)

Podemos assim, com base nessa definição de estrutura, considerar o sistema de operações sobre signos como uma estrutura epistêmico-psicológica cujos principais elementos são os signos, e as transformações do sistema são as operações formais sobre signos. O sistema assim pensado guarda em sua estrutura os caracteres de totalidade, de autorregulação e de transformação, condições necessárias a todos os sistemas de transformações, conforme evidencia Piaget no livro *O estruturalismo* (1979, p.6).

Nesse caso, as operações formais (operações sobre formas) resultam da coordenação de esquemas de transignações, e o período operatório formal pode assim ser visto como um sistema de operações sobre signos.

Salientamos que tal sistema não constitui uma estrutura epistêmico-psicológica puramente verbal. Esse sistema de operações sobre signos, necessário para a compreensão, por parte do sujeito, das estruturas lógico-matemáticas, guarda, em sua composição, as mesmas características do período hipotético-dedutivo.

Temos então os seguintes resultados:

(**i**) O pensamento operatório, subjacente ao sistema de operações sobre signos, é um pensamento essencialmente hipotético-dedutivo. Por meio do sistema de signos, o sujeito não opera apenas sobre objetos atualmente percebidos ou sobre a realidade concreta, mas inclusive sobre hipóteses, na forma de proposições ou enunciados hipotéticos e que independem de seu caráter real. O sujeito então deduz, isto é, opera sobre tais proposições, e conclui, a partir dessas operações, suas consequências necessárias (Piaget, 1976, p.189).

(**ii**) Logo, é propriedade do sistema de operações sobre signos referir-se a elementos verbais, por meio de proposições, e não diretamente aos objetos concretos.

Segundo Piaget (1976): "[...] os signos que servem para formular o enunciado [de tais proposições] podem ser os da linguagem comum ou os de um simbolismo convencional" (p.32), como no caso das estruturas da Lógica e da Matemática, como ao definir a linguagem de um sistema formal e as estruturas para linguagens de primeira ordem, por exemplo.

(**iii**) O sistema de operações sobre signos pressupõe assim nova lógica: a lógica das proposições. É uma lógica de todas as combinações possíveis do pensamento, independente se o problema apresentado é experimental ou puramente verbal. Com a lógica das proposições, há um conjunto mais extenso de possibilidades lógicas em relação ao período operatório concreto. O sujeito, de posse da lógica das proposições, opera justamente por meio de relações sobre relações e pode, frente ao sistema agora constituído, solucionar com eficácia os novos problemas que lhe são apresentados. O sistema de operações sobre signos, ao mesmo tempo, pressupõe e é responsável pela constituição da lógica das proposições.

(**iv**) Uma das características do pensamento formal, como vimos na parte precedente, é a constituição de um sistema de operações de segunda potência. As operações concretas são operações de primeira potência, pois se referem a objetos concretos, por meio de classificações e seriações. Estas classificações e seriações resultam de experiências lógico-matemáticas, uma vez que extraem as informações não dos objetos como tais, mas das operações realizadas sobre tais objetos.

O sistema de operações sobre signos é então um sistema de segunda potência, já que, pela propriedade dos signos, eles podem designar qualquer objeto por convenção, inclusive uma operação em primeira potência,

e, portanto, as transignações podem ser operações de segunda potência, na medida em que são operações sobre signos que designam operações em primeira potência.

(**v**) Um sistema de operações sobre signos é assim um sistema que pressupõe a combinatória. As operações de segunda potência, agora, referem-se às próprias classificações e seriações antes efetuadas concretamente através de experiências matemáticas sobre os objetos reais. Para referir-se às operações de segunda potência, o sujeito o faz através de hipóteses compatíveis com o sistema total. O pensamento operatório concreto também repousava sobre proposições, mas elas não estavam ligadas umas às outras enquanto proposições, mas unicamente através de seu conteúdo lógico, por meio de estruturas de classes e de relações, em correspondência com o próprio objeto.

(**vi**) O sistema de operações sobre signos não é meramente uma manipulação de signos e símbolos. É, antes de tudo, resultado de uma estrutura formal de pensamento. Portanto, supõe uma lógica nova, como vimos, e essa lógica engendra possibilidades em forma de hipóteses e resultados por necessidade. Tais resultados são possíveis graças ao próprio jogo sintático-semântico realizado pelo sujeito epistêmico em função das relações limitadas pelas situações dadas.

Descrevendo brevemente a constituição do sistema de operações sobre signos, temos que, por meio de abstrações reflexivas e experiências matemáticas ininterruptas, o sujeito estrutura os dados através de um sistema único de operações sobre signos no qual os domínios, considerados até então heterogêneos, se implicam diretamente e compõem-se em uma to-

talidade que caracteriza o sistema. O sujeito formal, então, por intermédio de abstrações reflexivas sobre operações concretas, situa cada um dos domínios num patamar "superior", devido à imposição de novos problemas que necessitam da composição dos domínios para serem solucionados. Colocados os diversos domínios em um patamar superior, é necessário que o sujeito epistêmico reorganize os dados apresentados, considerando uma homogeneidade entre os diferentes domínios, daí o surgimento, por abstrações reflexivas e experiências lógico-matemáticas, de operações de segunda potência. Novamente, são operações de segunda potência, pois a realidade impôs a necessidade de considerar os domínios de forma homogênea, como partes integrantes de um sistema único, para então solucionar o problema, por meio de operações de operações. O sujeito coordena entre si os resultados das operações concretas (**i**) dissociando a realidade bruta e os conteúdos das operações concretas em função das diversas combinações possíveis entre os domínios considerados em sua totalidade; portanto, (**ii**) o sujeito coordena os diversos agrupamentos de classes e de relações num único sistema total, conduzindo assim à descoberta da lógica das proposições: o surgimento da combinatória.

(**vii**) No sistema de operações sobre signos, os sujeitos somente admitem os fatos como sendo fatos propriamente ditos após uma verificação experimental, subordinada ao conjunto de hipóteses compatíveis com o problema proposto. Isso quer dizer que o real está subordinado ao possível: o real é somente uma entre todas as possibilidades consideradas compatíveis com o sistema que interliga os diversos domínios antes heterogêneos.

Nesse caso, lembremos que, como escreve Piaget (1976):

> Portanto, o característico da lógica das proposições não é, apesar das aparências e da opinião corrente, ser uma lógica verbal: é, antes de tudo, uma lógica de todas as combinações possíveis do pensamento, tanto no caso em que tais combinações aparecem com problemas experimentais, quanto no caso em que aparecem diante de problemas puramente verbais. Sem dúvida, tais combinações se superpõem, graças às hipóteses, à simples leitura dos dados, e supõem também um apoio verbal interior; mas não é esse apoio que constituiu o motor efetivo da lógica das proposições. Esse motor é o poder de combinar, graças ao qual ela insere o real no conjunto das hipóteses possíveis, compatíveis com os dados. (p.190)

Por fim, em relação ao conhecimento das estruturas matemáticas, temos que o sistema de operações sobre signos é condição necessária para o sujeito compreender as estruturas lógico-matemáticas. Em especial, as operações sobre os indivíduos das estruturas são representadas por signos e, através de operações sobre signos (transignações, reversíveis e coordenadas em estruturas totais), o sujeito compreende as relações sintático e semânticas desses sistemas abstratos.

Nesse contexto, Tassinari e D'Ottaviano (2012) afirmam:

> [...] um sistema de signos e de operações sobre eles [no sentido explicitado anteriormente] possui tanto uma parte semântica (relativa aos significados dos signos) como uma parte sintática [...]. Nesse sentido, as opera-

ções sobre a parte sintática dos signos representam operações sobre a parte semântica dos signos. A ideia é então estudarmos as relações e operações semânticas a partir das relações e operações sintáticas dos signos. A vantagem desse estudo é a de substituir elementos abstratos e invisíveis por outros elementos concretos e visíveis e, a partir daí, definir, de forma mais rigorosa, noções lógicas como as de dedução, consequência sintática, demonstração e teorema. (p.155)

Considerações finais

De maneira geral, o objetivo deste livro foi explicitar, a partir da Epistemologia Genética e da Psicologia Genética, as relações entre as estruturas epistêmico-psicológicas descritas por Piaget ao longo de sua obra e as estruturas lógico-matemáticas formalizadas e, a partir dessas relações, buscar responder à pergunta: Como o sujeito compreende as estruturas lógico-matemáticas?

Para tal, no Capítulo 1, explicitamos o que entendemos por formas matemáticas a partir das noções de estruturas e de isomorfismos entre estruturas. Assim, apresentamos a definição de estrutura matemática específica, a partir do trabalho de Shoenfield (1967). Introduzimos a definição de operação parcial unitária e mostramos que uma estrutura matemática específica A pode ser considerada constituída de conjuntos de conjuntos de operações parciais unitárias no conjunto de indivíduos de A. Exemplificamos uma das mais importantes estruturas estudadas em Matemática, a estrutura de grupo, e tratamos a noção de estrutura matemática abstrata, introduzida através da noção de sistema abstrato de Kleene (1952), para mostrar que o grupo é uma estrutura matemática abstrata. Por

fim, nesse capítulo, explicitamos o que entendemos por forma matemática.

No Capítulo 2, a partir da explicitação da estrutura epistêmico-psicológica grupo prático de deslocamentos (GPD), mostramos como as formas matemáticas estão presentes nas ações sensório-motoras. Para tal, apresentamos inicialmente alguns elementos da teoria de Piaget que dizem respeito ao período sensório-motor. Explicitamos então duas noções fundamentais da Epistemologia Genética, centrais para este livro: a definição de estrutura para Piaget e a noção de estrutura epistêmico-psicológica. Apresentamos a estrutura grupo prático de deslocamentos, introduzida por Piaget (cf. 1970; 1978; 2008) e por Piaget e Inhelder (2002) e explicitada por Marçal e Tassinari (2013). Por fim, tentamos responder se o sujeito, no período sensório-motor, já possui uma estruturação que comporta uma forma matemática que é fundamental, por sua vez, para as construções ulteriores, ainda que tal forma seja inconsciente para esse sujeito. Neste caso, vimos que o grupo prático de deslocamento tem a forma matemática de um grupo, mostrando que já existe uma forma matemática na estruturação sensório-motora.

No Capítulo 3, mostramos a existência de uma estrutura epistêmico-psicológica, o sistema de esquemas de transfigurações, necessária para explicitação da passagem na qual a criança age sobre a experiência sensível à estruturação lógico-matemática do real, segundo os trabalhos de Tassinari (1998; 2011). Além disso, mostramos a existência de uma estrutura matemática subjacente a tal estrutura epistêmico-psicológica, os digrafos-RPT, estabelecendo uma relação entre a estrutura mental e uma estrutura matemática. Para tal, apresentamos a definição de operação em Piaget (1957, p.45) e algumas características do pensamento operatório concreto (agrupamento). Estabelecemos uma relação entre o sistema de esquemas de

transfiguração e as operações concretas, mostrando, através de um exemplo, como essas resultam da coordenação dos sistemas. Apresentamos as relações entre o sistema de esquemas de transfigurações e a estrutura de digrafos-RPT. Por fim, propusemos designar as transfigurações e seus esquemas de operações sobre símbolos e mostramos que as operações parciais podem ser consideradas formas matemáticas dessas operações sobre símbolos.

No Capítulo 4, elaboramos nossas principais hipóteses para responder à pergunta: Como o sujeito compreende as estruturas lógico-matemáticas formais e abstratas? Para tal, apresentamos as características gerais do período operatório formal ou hipotético-dedutivo; apresentamos a passagem do período operatório concreto ao período operatório formal. Para introduzir a noção de esquemas de transignações e a compreensão das estruturas lógico-matemáticas, procedemos da seguinte forma: apresentamos a definição de transignação e mostramos que o sistema de operações formais pode ser visto como resultado da coordenação de esquemas de transignações; discutimos como o sistema de esquemas de transignação permite compreender as estruturas matemáticas; por fim, apresentamos a forma geral do funcionamento do sistema de operações sobre signos.

Sobre a compreensão do conhecimento matemático por parte do sujeito epistêmico, com apoio na Epistemologia Genética, buscamos mostrar a existência de uma estrutura epistêmico-psicológica que coincide, por assim dizer, com a representação de uma estrutura matemática específica, conforme definida no Capítulo 1. Nesse sentido, o sistema de operações sobre signos é a estrutura epistêmico-psicológica necessária para a compreensão das estruturas lógico-matemáticas. Mas, na medida em que as estruturas matemáticas foram definidas, neste livro, em termos de conjuntos de conjuntos de operações parciais

sobre o conjunto de indivíduos do domínio da estrutura, pudemos corresponder uma estrutura epistêmico-psicológica com as estruturas matemáticas em geral, uma vez que as operações matemáticas parciais foram consideradas formas matemáticas das operações mentais (concretas e formais).

De forma resumida, podemos dizer que a correspondência entre as estruturas epistêmico-psicológicas e as estruturas matemáticas permite explicar como as últimas são possíveis, na medida em que as primeiras assumem a forma delas. Também permite explicar como o sujeito entende essas últimas, na medida em que elas são formas de um sistema de ações e operações, ou seja, ações e operações que ele coordena segundo formas matemáticas, o que lhe permite então tomar consciência dessas formas.

Referências bibliográficas

APOSTEL, L.; MANDELBROT, B.; PIAGET, J. *Logique et équilibre*. Paris: PUF, 1957.

_______ et al. *Les liaisons analytiques et synthétiques dans les comportements du sujet*. Paris: Presses Universitaires de France, 1957.

BATTRO, A. M. *Dicionário terminológico de Jean Piaget*. Tradução Lino de Macedo. São Paulo: Pioneira, 1978.

BETH, E. W; PIAGET, J. *Épistemologie mathématique et psychologie:* essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle. Paris: Presses Universitaires de France, 1961.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. *Um prelúdio à Lógica*. São Paulo: Editora Unesp, 2005.

FERREIRA, R.R. *Sobre o uso da função proposicional e sua gênese segundo a epistemologia genética.* Marília, 2011. 113f. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista.

GRANGER, G. G. *Por um conhecimento filosófico*. Campinas: Papirus, 1989.

_______. *A ciência e as ciências*. São Paulo: Editora Unesp, 1994.

HODGES, W. *Model theory.* New York: Cambridge University Press, 1993.

KLEENE, S. C. *Introduction to Metamathematics*. Princeton: Van Nostrand, 1952.

MARCYA, A.; TOFFALORI, C. *A guide to classical and modern model theory.* Dordrecht Kluwer Academic Publishers, 2003.

MARÇAL, V. E. R.; TASSINARI, R. P. O modelo "grupo prático de deslocamentos" em Psicologia e Epistemologia Genéticas e sua formalização. *Schème*: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas, 2013.

MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*. 4.ed. (acrescida). Chapman & Hall, 1997.

MORGENBESSER, S. (Org.). *Filosofia da ciência*. São Paulo: Cultrix, 1972.

NASCIMENTO, M. C.; FEITOSA, H. A. *Estruturas algébricas*. 1.ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2013. 166p.

NOGUEIRA, C. M. I. *Classificação, seriação e contagem no ensino do número:* um estudo de Epistemologia Genética. 1.ed. Marília: Oficina Universitária Unesp, 2007. v.300. 246p.

PIAGET, J. (Org.). *Lógica e conhecimento científico.* Porto: Livraria Civilização, 1980. v.1.

_______. *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France, 1946.

_______. *Traité de logique*: essai de logistique opératoire. Paris: A. Colin, 1949.

_______. *A construção do real na criança*. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

_______. *A Epistemologia Genética*. Trad. Nathanael C. Caixeira. Petropólis: Vozes, 1971.

_______. *Biologia e conhecimento*: ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognoscitivos. Petrópolis: Vozes, 1973.

_______. *Psicologia e epistemologia*: por uma teoria do conhecimento. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

_______. *A equilibração das estruturas cognitivas*: problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

_______. *Ensaio de lógica operatória*. Tradução de Maria Ângela Vinagre de Almeida. Porto Alegre: Globo; São Paulo: Edusp, 1976.

_______. *A Epistemologia Genética*. São Paulo: Abril Cultural, 1978a. (Coleção Os Pensadores).

________. *Sabedorias e ilusões da Filosofia*. São Paulo: Abril Cultural, 1978c. (Coleção Os Pensadores).

________. *O estruturalismo.* São Paulo: Difel, 1979.

________. Psicogênese dos conhecimentos e seu significado epistemológico. In: *Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem*. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1983b.

________. *A formação do símbolo na criança*: imagem, jogo e sonho; imagem e representação. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

________. *Abstração reflexionante*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

________. *Seis estudos de Psicologia*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2001.

________. *O nascimento da inteligência na criança*. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

________; BETH, W. E.; MAYS, W. *Epistemologia Genética e pesquisa psicológica.* Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

________; INHELDER, B. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*. São Paulo: Pioneira, 1976.

________. *A psicologia da criança*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2002.

________; SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z. *Piaget*: modelo e estrutura. Rio de Janeiro: José Olympio, 1972.

________. *Em busca do sentido da obra de Jean Piaget*. São Paulo: Ática, 1984.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical logic.* Addison-Wesley, 1967. *viii*-344p. (Addison-Wesley Series in Logic).

TASSINARI, R. P. *Da ação sobre a experiência sensível à estruturação lógica do real*: um estudo da forma da construção do agrupamento em Piaget. São Paulo, 1998. 64f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo.

________. *Incompletude e auto-organização*: sobre a determinação de verdades lógicas e matemáticas. Campinas, 2003. 238f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Universidade Estadual de Campinas.

________. Sobre a realidade-totalidade como saber vivo e a auto-organização do espaço físico. In: FILHO, E. B. et al. (Eds.).

Auto-organização: estudos interdisciplinares. Campinas: Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2008. p.59-108. (Coleção CLE, v. 52).

_______. Sobre uma estrutura fundamental para a lógica operatória concreta. In: MONTOYA, A. O. D. et al. (Org.). *Jean Piaget no século XXI*: escritos de Epistemologia e Psicologia Genéticas. Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2011.

_______. *Formalização em Epistemologia Genética e digrafos*. São Paulo: Cognitio, 2013. v.14(2).

_______; D'OTTAVIANO, I. M. L. *A lógica e as lógicas*: sobre a noção de sistema formal e o princípio da liberdade lógica. In: GONZALEZ, M. E. Q.; BROENS, M. C.; MARTINS, C. A. (Orgs.). *Informação, conhecimento e ação ética*. 1.ed. Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012. v.1, p.153-68.

_______; FERRAZ, A. A.; PESSOA, K. B. C. Jean Piaget, arauto da auto-organização, e algumas de suas contribuições ao estudo da auto-organização. In: BRESCIANI FLHO, E. et al. (Orgs.). *Auto-organização*: estudos interdisciplinares. 1.ed. Campinas, SP: Coleção CLE, 2014. v.66, p.415-38.

Sobre os autores

Ricardo Pereira Tassinari. Professor do Departamento de Filosofia e do Programa de Pós-Gradução em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Unesp de Marília. Pesquisador junto ao Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp. Coordenador do Grupo de Trabalho Hegel (GT Hegel) da Associação Nacional de Pós-Graduação em Filosofia (Anpof). Vice-presidente da Sociedade Hegel Brasileira (SHB). Vice-presidente da Sociedade Brasileira Jean Piaget (SBJP). Membro da Jean Piaget Society (JPS) e da Sociedade Brasileira de Lógica (SBL). Realizou pós-doutorado nos Archives Jean Piaget, da Université de Genève, doutorado em Filosofia pela Unicamp, mestrado em Psicologia pelo Instituto de Psicologia da USP, bacharelado em Física, com Iniciação Científica em Lógica-Matemática, pela Unicamp. Atualmente, desenvolve e orienta pesquisas sobre Filosofia Especulativa Hegeliana, Epistemologia Genética de Jean Piaget, Lógica, Epistemologia, Teoria do Conhecimento e Filosofia da Ciência.

Alexandre Augusto Ferraz. Aluno do curso de Doutorado em Filosofia pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Unicamp, na linha de pesquisa em Lógica e Epistemologia. Mestre em Filosofia pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Unesp, campus de Marília, na linha de pesquisa em Lógica e Epistemologia. Licenciado em Matemática pela Unesp. Membro do Grupo de Lógica e Epistemologia, do Grupo Interdisciplinar de Auto-Organização, Sistêmica e Informação e do Grupo de Estudos e Pesquisas em Epistemologia Genética e Educação.

SOBRE O LIVRO

Formato: 12 x 21 cm
Mancha: 20,4 x 42,5 paicas
Tipologia: Horley Old Style 10,5/14

EQUIPE DE REALIZAÇÃO

Coordenação Geral
Maria Luiza Favret